Уфа : УГАТУ, 2011 Вестник УГАТУ Т. 15, № 5 (45). С. 94–97

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ…

УДК 681.3.057.088:517.92

А. И. Заико

ИНФОРМАЦИОННЫЙ КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ЗАИКО

Предложен алгоритм выбора шага равномерной дискретизации случайного процесса с равномерным законом распределения, позволяющий нормировать потери измерительной информации из-за дискретности показаний. *Информационный критерий*; *равномерная дискретизация*; *случайный процесс*

Дискретизация во времени и квантование по уровню являются первыми и поэтому наиболее ответственными операциями при обработке динамических сигналов. При этом часть измерительной информации безвозвратно теряется. Оценить количество извлекаемой информации и ее потери можно с помощью информационных критериев, которые изложены в [1–4].

В статье эта актуальная задача решена для оригинальной модели измеряемого сигнала, который описывается стационарным случайным процессом с равномерным законом распределения [5, 6]. Он адекватен реальным сигналам и характеризуется всего тремя параметрами: нижней $X_\text{Н}$ и верхней $X_\text{В}$ границами изменения, а также нормированной корреляционной функцией $\rho_{ij} = \rho(t_j - t_i)$, где $t_j - t_i$ – сдвиг во времени между i и j сечениями процесса, i, j – 1, 2,…. Через эти параметры выражаются все многомерные характеристики процесса и они легко идентифицируются [7].

С учетом введенных обозначений одномерная априорная плотность вероятности $w_1[X_1]$ случайного X_1 процесса в момент времени t_i равна

$$w_1[X_1] = \begin{cases} \dfrac{1}{X_\text{в} - X_н}, & X_\text{н} \le X_1 \le X_\text{в}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Соответствующая ей априорная дифференциальная энтропия первого измерения [8]

$$h = -\int_{-\infty}^{\infty} w_1[X_1] \ln w_1[X_1] dX_1 = \ln(X_\text{в} - X_\text{н}).$$

Погрешность измерительного канала (ИК) системы в каждом показании x_{ij} считаем независимой и распределенной равномерно в пределах ширины кванта $2\Delta_к$ с плотностью вероятности

$$w_1[\Delta] = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Delta_к}, & -\Delta_к \le \Delta \le +\Delta_к; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1}$$

Подставив в выражение (1) $\Delta = x_{ij} - X_i$, получим апостериорную плотность вероятности $w_1[X_i \mid x_{ij}]$ i-го показания x_{ij}, соответствующего j-й отметке шкалы

$$w_1\left[X_i \middle| x_{ij}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Delta_к}, & x_{ij} - \Delta_к \le X_i \le x_{ij} + \Delta_к; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда апостериорная энтропия i-го измерения [8]

$$h(x_{ij}) = -\int_{-\infty}^{\infty} w_1\left[X_1 \middle| x_{ij}\right] \ln w_1\left[X_1 \middle| x_{ij}\right] dX_1 = \ln 2\Delta_к. \tag{2}$$

Количество информации $I(x_{1g})$, извлекаемое в первом измерении, результатом которого является показание ИК x_{1g}, равно [8]

$$I(x_{1g}) = h - h(x_{ij}) = \ln \frac{X_\text{в} - X_\text{н}}{2\Delta_к} = \ln \frac{\sigma_x}{\sigma_\delta},$$

где $\sigma_x = (X_в - X_н)/2\sqrt{3}$ и $\sigma_\delta = \Delta_к/\sqrt{3}$ – среднеквадратические значения, соответственно, измеряемого сигнала и погрешности ИК.

К моменту второго измерения $t_2 = t_1 + T_0$, где T_0 – шаг равномерной дискретизации, условная плотность вероятности $w_1[X_2 \mid x_{1g}, T_0]$ из-за вероятностной зависимости его от показания x_{1g} равна

$$w_1\left[X_2 \middle| x_{1g}, T_0\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{X_\text{в}(x_{1g}, T_0) - X_н(x_{1g}, T_0)}, \\ \qquad X_н(x_{1g}, T_0) \le X_2 \le X_\text{в}(x_{1g}, T_0); \\ 0, \quad \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где разность условных верхней и нижней границ изменения X_2

Контактная информация: (347)272-11-62

$$X_в\left(x_{1g},T_0\right)-X_н\left(x_{1g},T_0\right)=$$
$$=X_в-X_н-\rho_{12}\left(X_в-X_н-2\Delta_к\right),$$

причем ρ_{12} – нормированная корреляция значений X_1 и X_2 случайного процесса между моментами времени t_1 и t_2.

Априорная дифференциальная энтропия $h(x_{1g}, T_0)$ второго измерения реализации случайного процесса

$$h\left(x_{1g},T_0\right)=\ln\left[X_в-X_н-\rho_{12}\left(X_в-X_н-2\Delta_к\right)\right].$$

Апостериорная дифференциальная энтропия $h(x_{2k})$ второго измерения находится по формуле (2) при $i = 2$ и $j = k$, а количество информации, извлекаемое ИК во втором измерении с учетом вероятностной зависимости от первого показания x_{1g},

$$I\left(x_{1g},x_{2k},T_0\right)=h\left(x_{1g},T_0\right)-h\left(x_{2k}\right)=$$
$$=\ln\left[\frac{X_в-X_н}{2\Delta_к}-\rho_{12}\left(\frac{X_в-X_н}{2\Delta_к}-1\right)\right]=$$
$$=\ln\left[\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-\rho_{12}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\right].$$

Аналогично априори i-го измерения условная плотность вероятности $w_1[x_{1g},\ldots, x_{(i-1)l}, T_0]$ с учетом предыдущих показаний $x_{1g},\ldots, x_{(i-1)l}$ равна

$$w_1\left[X_i\middle|x_{1g},\ldots,x_{(i-1)l},T_0\right]=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{X_в\left(x_{1g},\ldots,x_{(i-1)l},T_0\right)-X_н\left(x_{1g},\ldots,x_{(i-1)l},T_0\right)}, \\ \quad X_н\left(x_{1g},\ldots,x_{(i-1)l},T_0\right)\le X_2\le \\ \quad \le X_в\left(x_{1g},\ldots,x_{(i-1)l},T_0\right); \\ 0,\ \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где разность

$$X_в\left(x_{1g},\ldots,x_{(i-1)\,l},T_0\right)-X_н\left(x_{1g},\ldots,x_{(i-1)\,l},T_0\right)=$$
$$=X_в-X_н-\left(\rho_{1i}\cdots\rho_{(i-1)i}\right)\times$$
$$\times\begin{pmatrix}1 & \cdots & \rho_{1(i-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \rho_{1(i-1)} & \cdots & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ \cdots\\ 1\end{pmatrix}\left(X_в-X_н-2\Delta_к\right).$$

Тогда априорная дифференциальная энтропия i-го измерения

$$h\left(x_{1g},\ldots,x_{(i-1)l},T_0\right)=$$
$$\ln\left[\begin{matrix}X_в-X_н-\left(\rho_{1i}\cdots\rho_{(i-1)i}\right)\times\\ \times\begin{pmatrix}1 & \cdots & \rho_{1(i-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \rho_{1(i-1)} & \cdots & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ \cdots\\ 1\end{pmatrix}\left(X_в-X_н-2\Delta_к\right)\end{matrix}\right]$$

и количество получаемой информации в i-м измерении с учетом выражения (2) равно

$$I\left(x_{1g},\ldots,x_{lj},T_0\right)=$$
$$\ln\left[\begin{matrix}\dfrac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-\left(\rho_{1i}\cdots\rho_{(i-1)i}\right)\times\\ \times\begin{pmatrix}1 & \cdots & \rho_{1(i-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \rho_{1(i-1)} & \cdots & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ \cdots\\ 1\end{pmatrix}\left(\dfrac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\end{matrix}\right].$$

Количество информации $I(T, T_0)$, извлекаемое ИК за все время эксперимента $T = (n-1)T_0$, в течение которого сделано n измерений, равно

$$I\left(T,T_0\right)=\sum_{i=1}^{n}I\left(x_{1g},\ldots,x_{ij},T_0\right)=$$
$$=\ln\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}+\sum_{i=2}^{n}\ln\left[\begin{matrix}\dfrac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-\left(\rho_{1i}\cdots\rho_{(i-1)i}\right)\times\\ \times\begin{pmatrix}1 & \cdots & \rho_{1(i-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \rho_{1(i-1)} & \cdots & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ \cdots\\ 1\end{pmatrix}\left(\dfrac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\end{matrix}\right].\tag{3}$$

Это количество информации равно максимальному $I(T)$ при шаге дискретизации $T_0 = 0$. Найти $I(T)$ можно задавшись корреляционной функцией ρ_{ij} случайного процесса. Нормируя долю извлекаемого количества информации $I(T, T_0)$ от максимально возможного $I(T)$, выбирают шаг дискретизации T_0 [2]. Как это делается, рассмотрим на конкретном примере.

Если рассматриваемый случайный процесс обладает еще и марковским свойством, то $\rho_{(i-1)\,i}=e^{-\alpha T_0}$, где $0\le\alpha<\infty$ – коэффициент динамичности [9]. Тогда выражение (3) примет вид

$$I\left(T,T_0\right)=\sum_{i=1}^{n}I\left(x_{ij},T_0\right)=$$
$$\ln\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}+\frac{T}{T_0}\ln\left[\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-e^{-\alpha T_0}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\right].\tag{4}$$

Из выражения (4) видно, что оптимизируется по αT_0 только второе слагаемое, которое представим в виде

$$\frac{I(T,T_0)-\ln(\sigma_x/\sigma_\delta)}{\alpha T}=\frac{1}{\alpha T_0}\ln\left[\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-e^{-\alpha T_0}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\right]. \quad (5)$$

При αT_0 = 0 выражение (5) принимает максимальное значение, равное

$$\frac{I(T)-\ln(\sigma_x/\sigma_\delta)}{\alpha T}=\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1.$$

Поделив на него выражение (5), получим относительное количество извлекаемой информации в виде

$$J=\frac{I(T,T_0)-\ln(\sigma_x/\sigma_\delta)}{I(T)-\ln(\sigma_x/\sigma_\delta)}= \ln\left[\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-e^{-\alpha T_0}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\right]\Big/\alpha T_0\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right). \quad (6)$$

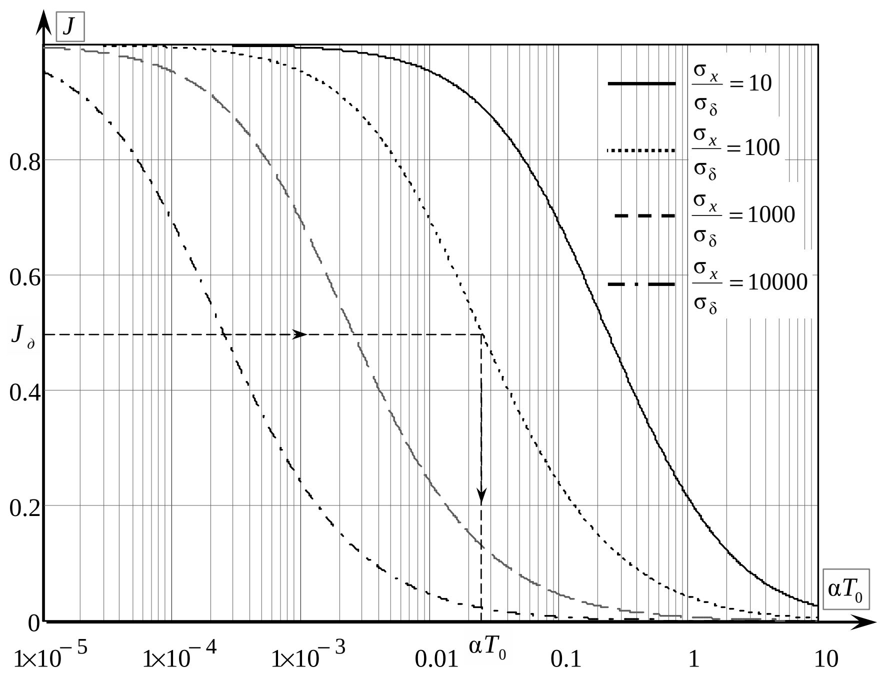
Графики зависимости J от αT_0 для различных значений отношения σ_x / σ_δ согласно выражению (6) приведены на рисунке.

Он показывает, какая часть измерительной информации J извлекается ИК с шагом дискретизации T_0 от максимально возможного при T_0 = = 0. Приравняв ее достаточному для достижения цели эксперимента значению $J\partial$ и проведя горизонталь до кривой с известным отношением σ_x / σ_δ, опустим перпендикуляр на ось абсцисс, найдем произведение αT_0, из которого получим требуемый шаг дискретизации T_0 [2].

Сравним этот критерий с известным корреляционным критерием Н. А. Железнова, при котором шаг T_0 выбирается так, чтобы корреляцией между соседними показаниями ИК можно было пренебречь [10]. Так, при $\rho_{12}=e^{-\alpha T_0}=0{,}05$ это выполняется, если αT_0 = = 2,996. Подставив это значение в выражение (6), получим, например, при (σ_x / σ_δ) = 100 J = = 0,005, а при (σ_x / σ_δ) = 1000 J = 0,002. Это означает, что выбор T_0 по корреляционному критерию позволяет извлечь только 0,5% измерительной информации при (σ_x / σ_δ) = 100 и 0,2% при (σ_x / σ_δ) = 1000. Следовательно, практически вся измерительная информация при этом теряется.

Отметим также, что квантовый критерий Ф. Е. Темникова выбора шага дискретизации T_0 требует знания максимального значения первой производной измеряемого сигнала [11]. При измерении случайных процессов это невозможно и квантовый критерий в этом случае неприменим.

Заметим попутно, что с помощью предлагаемого информационного критерия можно нормировать и потерю относительного количества измерительной информации из-за дискретности показаний во времени, которая составляет $1 - J$.



Выводы. Развиваемый информационный критерий дискретизации позволяет выбрать шаг дискретизации T_0 реализации случайного процесса, нормируя потери измерительной информации за время эксперимента T с учетом погрешности ИК. Эта задача решается комплексно с учетом свойств источника измерительной информации и применяемого для этой цели ИК. Разработанная модель случайного процесса проста и удобна для оптимизации измерительного эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сахно Э. А.** Информационный критерий определения периода отсчетов при представлении непрерывно изменяющихся величин в цифровом коде // Измерительная техника. 1973. № 5. С. 19−20.

2. **Заико А. И.** Информационный критерий равномерной дискретизации // Измерительная техника. 1976. № 9. С. 18−20.

3. **Горевич В. М., Пицкель Б. С., Ратмиров В. А.** Информационный критерий выбора числа точек контроля изделий // Измерительная техника. 1978. № 4. С. 15−17.

4. Информационный критерий оценки эффективности измерительных устройств / А. В. Балыков [и др.] // Ползуновский альманах. 2009. № 2. С. 164−169.

5. **Заико А. И.** Случайный сигнал с равномерным законом распределения // Измерительная техника. 1999. № 1. С. 9−11.

6. **Свид. 72200700005.** Случайный процесс Заико А.И. с равномерным законом распределения. Математическая модель. Зарег. ФГУП «ВНТИЦ» 28.02.07 г. Описание. 10 с.

7. **Заико А. И.** Многомерные характеристики случайного процесса Заико с равномерным законом распределения // Вестник УГАТУ. Т. 14. 2010. С. 117−122.

8. **Куликовский Л. Ф., Заико А. И.** Информационная оценка погрешности ИИС в динамическом режиме // Измерительная техника. 1974. № 6. С. 53−55.

9. **Заико А. И.** Случайные процессы. Модели и измерения. М.: Изд-во МАИ, 2006. 211 с.

10. **Железнов Н. А.** Принцип дискретизации стохастических сигналов с неограниченным спектром и некоторые результаты теории импульсной передачи сообщений // Радиотехника и электроника. 1958. № 1. С. 3−18.

11. **Темников Ф. Е**. Теория развертывающих систем. М.−Л.: Госэнергоиздат, 1963. 168 с.

ОБ АВТОРЕ

Заико Александр Иванович, проф. каф. теоретич. основ электротехники. Дипл. инж. электронной тех-ки (УАИ, 1970). Д-р техн. наук по информац.-измерит. системам (ЛЭТИ, 1990). Заслуж. изобретатель РБ и РФ. Член-кор. Междунар. инж. акад. Иссл. в обл. метрологич. обеспечения, анализа и синтеза информац.-измерит. систем