Уфа : УГАТУ, 2012 Вестник УГАТУ Т. 16, № 1 (46). С. 157–160

ЭЛЕКТРОНИКА, ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА, РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ

УДК 681.51.01:519.856

А. И. Заико

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА НА ВЫХОДЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Получены выражения для определения распределений эргодического случайного сигнала на выходе линейной инерционной системы по реализации входного сигнала. *Инерционная система*; *случайный сигнал*; *распределение на выходе*

Нахождение характеристик сигнала на выходе системы по известным параметрам входного сигнала и характеристикам системы является весьма распространеной задачей анализа.

В установившемся режиме сигнал $z(t)$ на выходе системы описывается интегралом Дюамеля [1, 2], который иногда называют сверткой,

$$z(t)=\int_{-\infty}^{t} w(t-\nu)x(\nu)d\nu\,, \qquad (1)$$

где $x(t)$ – входной сигнал, а $w(t)$ – импульсная переходная характеристика системы; t – текущее время.

Из выражения (1) следует, что для эргодических случайных процессов на входе системы с математическим ожиданием m_x и корреляционной функцией $R_x(t_2-t_1)$ математическое ожидание m_z, корреляционная $R_z(t_2-t_1)$ и взаимокорреляционная $R_{xz}(t_2-t_1)$ функции выходного сигнала равны [1, 2]:

$$m_z=\int_{-\infty}^{t} w(t-\tau)m_x d\tau=km_x; \qquad (2)$$

$$R_z(t_2-t_1)=\int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} w(t_1-\tau_1)w(t_2-\tau_2)R_x(\tau_2-\tau_1)d\tau_1 d\tau_2; \qquad (3)$$

$$R_{xz}(t_2-t_1)=\int_{-\infty}^{t_2} w(t_2-\tau_2)R_x(\tau_2-t_1)d\tau_2, \qquad (4)$$

где k – коэффициент усиления системы.

Аналогичные соотношения для распределений выходного сигнала отсутствуют. Известно лишь следующее. Если полоса пропускания системы существенно шире спектра входного сигнала, то она рассматривается как усилитель входного сигнала и распределение выходного сигнала с точностью до коэффициента повторяет распределение входного сигнала. При полосе пропускания системы меньшей по сравнению со спектром входного сигнала, система рассматривается как фильтр, который нормализует выходной процесс, т. е. делает его закон распределения близким нормальному [3].

Известно и более строгое решение, базирующееся на разложении распределения входного случайного сигнала на конечное число нормальных распределений. В результате распределение входного сигнала называется полигауссовским. Поскольку нормальный закон распределения инвариантен к линейным преобразованиям, то выходной процесс системы рассматривается как суперпозиция нормальных законов разложения, каждый из которых является трансформацией своего входного распределения [4].

Оба решения являются приближенными и затрудняют синтез систем высшего качества. В статье предлагается корректное решение этой задачи.

Одномерная плотность распределения вероятности $w_1[Z]$ выходного сигнала $z(t)$, обладающего эргодическим свойством, определена в виде [2, 5]

$$w_1[Z]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\delta[Z-z(t)]dt,$$

где $\delta[Z]=\begin{cases}\infty, & Z=0;\\ 0, & \text{в остальных случаях}\end{cases}$ – дельта-функция Дирака [2]; Z – аргумент плотности вероятности; $2T$ –длительность реализации.

Подставив значение $z(t)$ (1) в это выражение, окончательно получим

$$w_1[Z]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\delta\left[Z-\int_{-\infty}^{t} w(t-\nu)x(\nu)d\nu\right]dt. \qquad (5)$$

Из выражения (5) следует, что одномерное распределение вероятности $w_1[Z]$ выходного процесса системы, обладающего эргодическим свойством,

$$W_1[Z]=\int_{-\infty}^{Z} w_1[Y]dY=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1\left[Z-\int_{-\infty}^{t} w(t-\nu)x(\nu)d\nu\right]dt, \qquad (6)$$

Контактная информация: 8(347)272-11-62

где $1(Z)=\int\limits_{-\infty}^{Z}\delta(Y)dY=\left\{\begin{matrix}1, & Z>0;\\ 0, & Z<0\end{matrix}\right\}$ – единичная функция [2].

Из выражений (5) и (6) видно, что распределения выходного процесса линейной системы, удовлетворяющие эргодическому свойству, определяются реализацией входного сигнала системы, а не его распределением.

По определению математическое ожидание выходного сигнала [2, 6]

$$m_z=\int\limits_{-\infty}^{\infty}Zw_1[Z]dZ.$$

Подставив в это выражение значение (2) и поменяв последовательность интегрирования, получим

$$m_z=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}Z\delta\left[Z-\int\limits_{-\infty}^{t}w(t-\nu)x(\nu)d\nu\right]dZ\right\}dt.$$

С учетом фильтрующего свойства дельта-функции $\delta[.]$ [2]

$$m_z=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left\{\int\limits_{-\infty}^{t}w(t-\nu)x(\nu)d\nu\right\}dt.$$

Поменяв вторично порядок интегрирования, и, учитывая эргодическое свойство входного сигнала $x(t)$ системы, окончательно будем иметь

$$\begin{aligned}m_z&=\int\limits_{-\infty}^{t}w(t-\nu)\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}x(t)dt\right]d\nu=\\&=\int\limits_{-\infty}^{t}w(t-\nu)m_x d\nu=km_x.\end{aligned}\tag{7}$$

При выводе выражения (7) учтено, что для переходной функции физически реализуемой инерционной системы $h(0)=0$, а $h(\infty)=k$.

Полученное выражение (7) полностью совпадает с определением (2).

Аналогично для двумерных плотности распределения вероятности $w_2[Z_1;Z_2,\tau_{12}]$ и распределения вероятности $W_2[Z_1;Z_2,\tau_{12}]$ при конечном τ_{12}:

$$\begin{aligned}w_2[Z_1;Z_2,\tau_{12}]&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\delta\left[Z_1-\int\limits_{-\infty}^{t}w(t-\nu_1)x(\nu_1)d\nu_1\right]\times\\&\times\delta\left[Z_2-\int\limits_{-\infty}^{t+\tau_{12}}w(t+\tau_{12}-\nu_2)x(\nu_2)d\nu_2\right]dt;\\W_2[Z_1;Z_2,\tau_{12}]&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}1\left[Z_1-\int\limits_{-\infty}^{t}w(t-\nu_1)x(\nu_1)d\nu_1\right]\times\\&\times1\left[Z_2-\int\limits_{-\infty}^{t+\tau_{12}}w(t+\tau_{12}-\nu_2)x(\nu_2)d\nu_2\right]dt.\end{aligned}\tag{8}$$

По определению корреляционная функция $R_z(\tau_{12})$ выходного сигнала системы [2, 6]

$$R_z(\tau_{12})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(Z_1-m_z)(Z_2-m_z)w_2[Z_1;Z_2,\tau_{12}]dZ_1dZ_2.$$

Подставив в него значение (8) и проделав аналогичные преобразования, получим

$$\begin{aligned}R_z(\tau_{12})&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(Z_1-km_x)(Z_2-km_x)\times\\&\times\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\delta\left[Z_1-\int\limits_{-\infty}^{t}w(t-\nu_1)x(\nu_1)d\nu_1\right]\times\right.\\&\left.\times\delta\left[Z_2-\int\limits_{-\infty}^{t+\tau_{12}}w(t+\tau_{12}-\nu_2)x(\nu_2)d\nu_2\right]dt\right\}dZ_1dZ_2=\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left[\int\limits_{-\infty}^{t}w(t-\nu_1)x(\nu_1)d\nu_1-km_x\right]\times\\&\times\left[\int\limits_{-\infty}^{t+\tau_{12}}w(t+\tau_{12}-\nu_2)x(\nu_2)d\nu_2-km_x\right]dt=\\&=\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t+\tau_{12}}w(t-\nu_1)w(t+\tau_{12}-\nu_2)\times\\&\times\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}[x(\nu_1)-m_x][x(\nu_2)-m_x]dt\right\}d\nu_1d\nu_2=\\&=\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t+\tau_{12}}w(t-\nu_1)w(t+\tau_{12}-\nu_2)R_x(\nu_2-\nu_1)d\nu_1d\nu_2.\end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с определением (3), можно убедиться, что они совпадают при $t=t_1$, $t+\tau_{12}=t_2$, $\nu_1=\tau_1$ и $\nu_2=\tau_1$.

Взаимные плотность распределения вероятности и распределение вероятности $W_2[X;Z,\tau]$ определим как:

$$\begin{aligned}w_2[X;Z,\tau]&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\delta[X-x(t)]\times\\&\times\delta\left[Z-\int\limits_{-\infty}^{t+\tau}w(t+\tau-\nu)x(\nu)d\nu\right]dt;\\W_2[X;Z,\tau]&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}1[X-x(t)]\times\\&\times1\left[Z-\int\limits_{-\infty}^{t+\tau}w(t+\tau-\nu)x(\nu)d\nu\right]dt.\end{aligned}\tag{9}$$

Можно показать для выражения (9), что

$$R_{xz}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(X - m_x)(Z - m_z)w_2[X; Z, \tau]dXdZ = \\ = \int\limits_{-\infty}^{t+\tau} w(t + \tau - \nu)R_x(\nu - t)d\nu.$$

Сравнивая его со значением (4) видим, что они совпадают при $t = t_1$, $t + \tau = t_2$ и $\nu = \tau_2$.

Обобщая полученный результат, определим n-мерные плотность распределения вероятности $w_n[Z_1; Z_2, \tau_{12};\ldots; Z_n, \tau_{1n}]$ и распределение вероятности $W_n[Z_1; Z_2, \tau_{12};\ldots; Z_n, \tau_{1n}]$ эргодических случайных процессов на выходе системы в виде:

$$\begin{aligned} &w_n[Z_1; Z_2, \tau_{12};...; Z_n, \tau_{1n}] = \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\delta\left[Z_1 - \int\limits_{-\infty}^{t} w(t - \nu_1)x(\nu_1)d\nu_1\right]\times \\ &\times\delta\left[Z_2 - \int\limits_{-\infty}^{t+\tau_{12}} w(t + \tau_{12} - \nu_2)x(\nu_2)d\nu_2\right]\times\cdots \\ &\times\delta\left[Z_n - \int\limits_{-\infty}^{t+\tau_{1n}} w(t + \tau_{1n} - \nu_n)x(\nu_n)d\nu_n\right]dt; \\ &W_n[Z_1; Z_2, \tau_{12};...; Z_n, \tau_{1n}] = \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}1\left[Z_1 - \int\limits_{-\infty}^{t} w(t - \nu_1)x(\nu_1)d\nu_1\right]\times \\ &\times 1\left[Z_2 - \int\limits_{-\infty}^{t+\tau_{12}} w(t + \tau_{12} - \nu_2)x(\nu_2)d\nu_2\right]\times\cdots \\ &\times 1\left[Z_n - \int\limits_{-\infty}^{t+\tau_{1n}} w(t + \tau_{1n} - \nu_n)x(\nu_n)d\nu_n\right]dt. \end{aligned} \qquad (10)$$

На практике реализации $x(t)$ и $z(t)$ случайных сигналов неизвестны и вместо них в полученных выражениях берутся оценки $\langle x(t)\rangle$ и $\langle z(t)\rangle$. Кроме того, длительность $2T$ реализации процессов конечна, как и нижний предел интеграла Дюамеля, который обозначим через t_0. Поэтому вместо дельта функции $\delta[.]$ в выражении (5) воспользуемся одномерной условной плотностью вероятности

$$w_1[Z|\langle z(t)\rangle] = w_1\left[Z\left|\int\limits_{t_0}^{t} w(t - \nu)\langle x(\nu)\rangle d\nu\right.\right].$$

Тогда оценка одномерной плотности вероятности [2]

$$\langle w_1(Z)\rangle = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} w_1\left[Z\left|\int\limits_{t_0}^{t} w(t - \nu)\langle x(\nu)\rangle d\nu\right.\right]dt.$$

Математическое ожидание $m_{\delta w}(Z)$ и корреляционная функция $R_{\delta w}(Z_1, Z_2)$ этой оценки равны:

$$m_{\delta w}(Z) = \langle w_1[Z]\rangle - w_1[Z] = \\ = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left\{w_1\left[Z\left|\int\limits_{t_0}^{t} w(t - \nu)\langle x(\nu)\rangle d\nu\right.\right] - w_1[Z]\right\}dt;$$

$$R_{\delta w}(Z_1, Z_2) = \\ = \frac{1}{4T^2}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}\left\{w_2\left[Z_1, Z_2\left|\begin{matrix}\int\limits_{t_0}^{t_1} w(t_1 - \nu_1)\langle x(\nu_1)\rangle d\nu_1, \\ \int\limits_{t_0}^{t_2} w(t_2 - \nu_2)\langle x(\nu_2)\rangle d\nu_2\end{matrix}\right.\right]\right\}dt_1dt_2.$$

Аналогично находятся характеристики погрешностей для оценок двумерных плотностей распределений вероятностей $\langle w_2[Z_1; Z_2, \tau_{12}]\rangle$ и $\langle w_2[X; Z, \tau]\rangle$.

Согласно определению (10) оценка n-мерной плотности распределения вероятности $\langle w_n[Z_1; Z_2, \tau_{12};\ldots; Z_n, \tau_{1n}]\rangle$ при $|\tau_{12}| \le |\tau_{13}| \le\ldots\le |\tau_{1n}|$

$$\langle w_n[Z_1; Z_2, \tau_{12};...; Z_n, \tau_{1n}]\rangle = \\ = \frac{1}{(2T - |\tau_{1n}|)}\int\limits_{-T}^{T-|\tau_{1n}|} w_n\left[Z_1, Z_2,., Z_n\left|\begin{matrix}\int\limits_{t_0}^{t} w(t - \nu_1)\langle x(\nu_1)\rangle d\nu_1, \\ \int\limits_{t_0}^{t+|\tau_{12}|} w(t + |\tau_{12}| - \nu_2)\langle x(\nu_2)\rangle d\nu_2,..., \\ \int\limits_{t_0}^{t+|\tau_{1n}|} w(t + |\tau_{1n}| - \nu_n)\langle x(\nu_n)\rangle d\nu_n\end{matrix}\right.\right]dt.$$

Математическое ожидание $m_{\delta w}(Z_1; Z_2, \tau_{12};\ldots; Z_n, \tau_{1n})$ и корреляционная функция $R_{\delta w}(Z_{11}; Z_{21}, \tau_{12\text{-}1};\ldots; Z_{n1}, \tau_{1n\text{-}1}; Z_{12}; Z_{22}, \tau_{12\text{-}2};\ldots; Z_{n2}, \tau_{1n\text{-}2})$ этой оценки равны:

$$m_{\delta w}(Z_1; Z_2, \tau_{12};...; Z_n, \tau_{1n}) = \\ = \langle w_n[Z_1; Z_2, \tau_{12};...; Z_n, \tau_{1n}]\rangle - w_n[Z_1; Z_2, \tau_{12};...; Z_n, \tau_{1n}] = \\ = \frac{1}{(2T - |\tau_{1n}|)}\int\limits_{-T}^{T-|\tau_{1n}|}\left\{w_n\left[Z_1, Z_2,..., Z_n\left|\begin{matrix}\int\limits_{t_0}^{t} w(t - \nu_1)\langle x(\nu_1)\rangle d\nu_1, \\ \int\limits_{t_0}^{t+|\tau_{12}|} w(t + |\tau_{12}| - \nu_2)\langle x(\nu_2)\rangle d\nu_2,...., \\ \int\limits_{t_0}^{t+|\tau_{1n}|} w(t + |\tau_{1n}| - \nu_n)\langle x(\nu_n)\rangle d\nu_n\end{matrix}\right.\right] - \\ - w_n[Z_1; Z_2, \tau_{12};...; Z_n, \tau_{1n}]\right\}dt;$$

$$R_{\delta w}(Z_{11}; Z_{21}, \tau_{12\cdot 1};...; Z_{n1}, \tau_{1n\cdot 1}; Z_{12}; Z_{22}, \tau_{12\cdot 2};...; Z_{n2}, \tau_{1n\cdot 2}) = \\ = \frac{1}{(2T - |\tau_{1n\cdot 1}|)(2T - |\tau_{1n\cdot 2}|)}\times$$

$$\times \int_{-T}^{T-|\tau_{1n\cdot 1}|} \int_{-T}^{T-|\tau_{1n\cdot 2}|} \Big\{ w_{2n}\Big[Z_{11}, Z_{21},.., Z_{n1}, Z_{12}, Z_{22},..., Z_{n2} \Big|$$

$$\Big| \int_{t_0}^{t_1} w(t_1 - \nu_1)\langle x(\nu_1)\rangle d\nu_1,$$

$$\int_{t_0}^{t_1+|\tau_{12\cdot 1}|} w\big(t_1 + |\tau_{12\cdot 1}| - \nu_2\big)\langle x(\nu_2)\rangle d\nu_2,...,$$

$$\int_{t_0}^{t+|\tau_{1n\cdot 1}|} w\big(t + |\tau_{1n\cdot 1}| - \nu_n\big)\langle x(\nu_n)\rangle d\nu_n,$$

$$\int_{t_0}^{t_2} w(t_2 - \nu_1)\langle x(\nu_1)\rangle d\nu_1,$$

$$\int_{t_0}^{t_2+|\tau_{12\cdot 2}|} w\big(t_2 + |\tau_{12\cdot 2}| - \nu_2\big)\langle x(\nu_2)\rangle d\nu_2,...,$$

$$\int_{t_0}^{t_2+|\tau_{1n\cdot 2}|} w\big(t_2 + |\tau_{1n\cdot 2}| - \nu_n\big)\langle x(\nu_n)\rangle d\nu_n \Big] -$$

$$- w_n\Big[Z_{11}, Z_{21},.., Z_{n1} \Big| \int_{t_0}^{t_1} w(t_1 - \nu_1)\langle x(\nu_1)\rangle d\nu_1,$$

$$\int_{t_0}^{t_1+|\tau_{12\cdot 1}|} w\big(t_1 + |\tau_{12\cdot 1}| - \nu_2\big)\langle x(\nu_2)\rangle d\nu_2,...,$$

$$\int_{t_0}^{t_1+|\tau_{1n\cdot 1}|} w\big(t_1 + |\tau_{1n\cdot 1}| - \nu_n\big)\langle x(\nu_n)\rangle d\nu_n \Big] \times$$

$$\times w_n\Big[Z_{12}, Z_{22},.., Z_{n2} \Big| \int_{t_0}^{t_2} w(t_2 - \nu_1)\langle x(\nu_1)\rangle d\nu_1,$$

$$\int_{t_0}^{t_2+|\tau_{12\cdot 2}|} w\big(t_2 + |\tau_{12\cdot 2}| - \nu_2\big)\langle x(\nu_2)\rangle d\nu_2,...,$$

$$\int_{t_0}^{t_2+|\tau_{1n\cdot 2}|} w\big(t_2 + |\tau_{1n\cdot 2}| - \nu_n\big)\langle x(\nu_n)\rangle d\nu_n \Big]\Big\} dt_1 dt_2 .$$

Аналогично находятся оценки распределений вероятностей и характеристик их погрешностей.

Таким образом, распределение эргодического случайного процесса на выходе линейной инерционной системы определяется ее фильтрующим свойством и реализацией входного сигнала. Другими словами, располагая реализацией входного сигнала и динамическими характеристиками системы с помощью полученных в работе выражений можно найти распределения и моментные характеристики выходного сигнала системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Заико А. И.** Точность аналоговых линейных измерительных каналов ИИС. М.: Изд-во стандартов, 1987. 136 с.
2. **Заико А. И.** Теория систем. Стохастические модели. М.: Изд–во МАИ. 2005, 196 с.
3. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистический радиотехники. М.: Советское радио, 1974. Кн. 1. 552 с.
4. Статистическая теория связи и ее практические приложения / Под ред. Б. Р. Левина. М.: Связь, 1979. 288 с.
5. **Заико А. И.** Определения и алгоритмы измерения характеристик эргодических процессов // Метрология. 2003. № 4. С. 3–15.
6. ГОСТ 21878-76. Случайные процессы и динамические системы. Введ. 01.07.77 г. М.: Изд-во стандартов, 1976. 30 с.

ОБ АВТОРАХ

Заико Александр Иванович, проф. каф. теоретич. основ электротехники. Дипл. инж. электронной техники (УАИ, 1970). Д-р техн. наук по информац.-измерит. системам (ЛЭТИ, 1990). Заслуж. изобретатель РБ и РФ. Дейст. член Международ. инж. акад. Иссл. в области метрологич. обеспечения, анализа и синтеза информац.-измерит. систем и измерения случайных процессов.