Вестник УГАТУ
Уфа : УГАТУ, 2011 Т. 15, № 1 (41). С. 113–118
МАШИНОСТРОЕНИЕ

УДК ???

В. П. Житников, Р. Р. Муксимова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ПЛОСКИМ ЭЛЕКТРОД-ИНСТРУМЕНТОМ С ОГРАНИЧЕННОЙ НЕРОВНОСТЬЮ

Задачи моделирования нестационарного электрохимического формообразования сводятся к решению двух краевых задач для определения аналитических функций комплексного переменного: конформного отображения параметрической плоскости на физическую и частных производных по времени координат точек межэлектродного пространства. Каждая из функций ищется в виде суммы известной функции с особенностями и двух неизвестных функций, определяемых с помощью интеграла Шварца. Одна из неизвестных функций предназначена для описания неровности электрода-инструмента, вторая – обрабатываемой поверхности.Представлены результаты численного решения задач с электродом в виде сегмента круга и пластины. *Нестационарное формообразование*; *аналитические функции*; *установление стационарных конфигураций*

ВВЕДЕНИЕ

Для решения задач нестационарной электрохимической обработки применяются методы конечных [1] и граничных [2–4] элементов. При этом, как отмечается в [4], применение численных методов, как правило, затрудняется неустойчивостью, в особенности при исследовании длительных процессов и при обработке электрод-инструментами (ЭИ), имеющими острые кромки. Это приводит к необходимости разработки новых методов, обладающих улучшенными свойствами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим нестационарную задачу электрохимического формообразования с помощью ЭИ, представляющего собой плоскость с выступом или впадиной с горизонтальным размером R (рис. 1). ЭИ заглубляется в заготовку со скоростью V_{et} под прямым углом к поверхности. Начальный межэлектродный зазор (МЭЗ) равен S_0.

В результате растворения происходит сдвиг точек анодной границы, причем каждая из ее точек движется со своей скоростью $V_{ecm} \sim \frac{dW}{dZ}$. Асимптотическая величина зазора $S(t)$ изменяется и на бесконечности слева и справа приближается к стационарной величине

$$S_{st} = \frac{kk_I \eta U}{V_{et}}, \qquad (1)$$

где k – электрохимическая постоянная; k_I – коэффициент, учитывающий средний ток за период (с учетом скважности импульсов и изменения свойств среды); η – выход по току. При этом $V_{et} = V_{ecm}^{st}$.

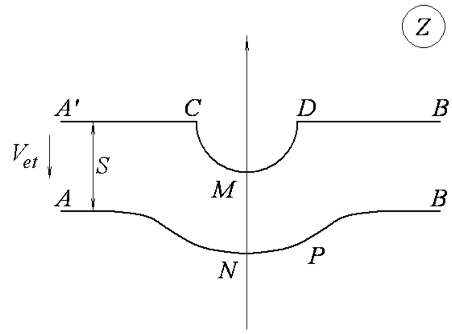


Рис. 1. Схема МЭП на физической плоскости

Задачи удобнее решать в безразмерном виде. Сведение к безразмерным величинам для данной задачи проведем следующим образом. В качестве характерного размера выберем величину стационарного зазора (1), который устанавливается при обработке (при обработке поверхности с горизонтальной асимптотой эта величина зазора устанавливается на бесконечности слева и справа).

Перейдем к безразмерным величинам z, x, y, τ и w, где

$$z = \frac{Z}{S_{st}},\ x = \frac{X}{S_{st}},\ y = \frac{Y}{S_{st}},$$
$$\tau = \frac{V_{et}}{S_{st}} t = \frac{kk_I \eta U}{S_{st}^2} t,\ w = \frac{W}{U}. \qquad (2)$$

Контактная информация: (347) 273-32-00

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента «Ведущие научные школы РФ» (проект НШ-65497.2010.9).

Тогда

$$v_{et} = -\frac{dy_{A'}}{d\tau} = -\frac{1}{S_{st}}\frac{S_{st}}{V_{et}}\frac{dY_{A'}}{dt} = \frac{V_{et}}{V_{et}} = 1,$$
$$v_{ecm} = -\frac{dy_A}{d\tau} = \frac{S_{st}}{S(t)} = \frac{1}{s(\tau)}. \quad (3)$$

При этом согласно (3) значение $s(\tau)$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$s = s_0 - \tau + \int_0^\tau v_{ecm}(\tau_1)d\tau_1 = s_0 - \tau + \int_0^\tau \frac{1}{s(\tau_1)}d\tau_1,$$
$$\frac{ds}{d\tau} = -1 + \frac{1}{s(\tau)} \quad (4)$$

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

В связи с эквипотенциальностью электродов форма области МЭП на плоскости комплексного потенциала представляет собой полосу (рис. 2).

Выберем в качестве параметрической переменную $\chi = \sigma + iv$, область изменения которой представляет собой горизонтальную полосу единичной ширины (рис. 3, *а*). Конформное отображение параметрической плоскости χ на плоскость комплексного потенциала определяется по формуле $W = Ui\chi$.

Тогда согласно (2)

$$w = \varphi + i\psi = i\chi\,,\ \frac{dw}{d\chi} = i\,,\ \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = 1\,. \quad (5)$$

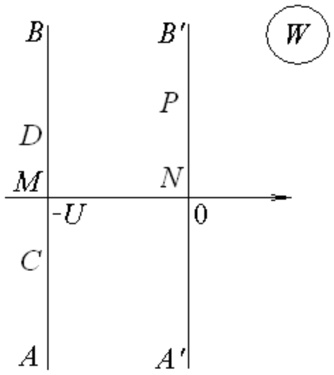


Рис. 2. Форма образа МЭП на плоскости комплексного потенциала

Представим функцию, конформно отображающую полосу плоскости χ на область МЭП физической плоскости в неподвижной (относительно тела заготовки) системе координат в виде суммы

$$z(\chi,\tau) = -i\int_0^\tau \frac{d\tau_1}{s(\tau_1)} + s(\tau)\chi + z_a(\chi,\tau) + z_c(\xi(\chi),\tau), \quad (6)$$

где $z_a(\chi, \tau)$ – аналитическая в области D_χ и непрерывная в ее замыкании $\overline{D}_\chi$ функция, определяющая отличие формы обрабатываемой поверхности от прямолинейной (при $\chi = \sigma+i$ Im $z_a(\chi, \tau) = 0$); $z_c(\xi, \tau)$ – аналитическая в области D_ξ и непрерывная в ее замыкании $\overline{D}_\xi$ функция, предназначенная для описания выпуклости на ЭИ (при $\xi = \omega + i0$ Im $z_c(\xi, \tau) = 0$). Функция $z_c(\xi, \tau)$ определена на полосе единичной ширины D_ξ (рис. 3, *б*). Связь ξ и χ

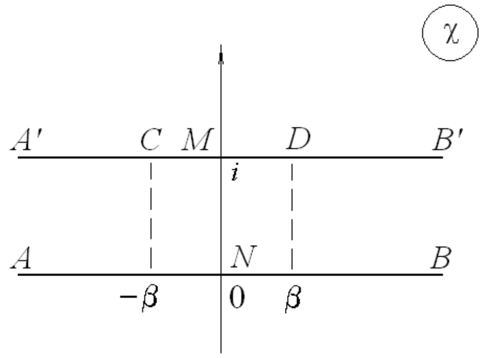
$$\chi = \frac{1}{\pi}\ln\frac{e^{\pi\xi}e^{\pi\beta}-1}{e^{\pi\xi}-e^{\pi\beta}} + i\,,\ \ \xi = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1+e^{\pi\chi}e^{\pi\beta}}{e^{\pi\chi}+e^{\pi\beta}}\,. \quad (7)$$

Производные при $\chi = \sigma$

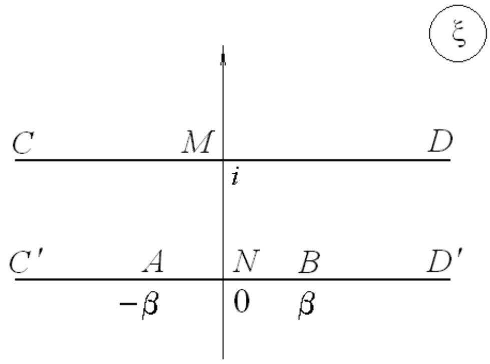
$$\frac{d\xi}{d\chi} = \frac{e^{\pi\sigma}\left(e^{2\pi\beta}-1\right)}{\left(1+e^{\pi\sigma}e^{\pi\beta}\right)\left(e^{\pi\sigma}+e^{\pi\beta}\right)},$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{e^{\pi\beta}\left(e^{2\pi\sigma}-1\right)}{\left(1+e^{\pi\sigma}e^{\pi\beta}\right)\left(e^{\pi\sigma}+e^{\pi\beta}\right)}\frac{d\beta}{d\tau}. \quad (8)$$

При $\xi = \omega + i$

$$\frac{d\xi}{d\chi} = \frac{\left(1+e^{\pi\omega}e^{\pi\beta}\right)\left(e^{\pi\omega}+e^{\pi\beta}\right)}{e^{\pi\omega}\left(e^{2\pi\beta}-1\right)},$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = -\frac{e^{\pi\beta}\left(e^{2\pi\omega}-1\right)}{e^{\pi\omega}\left(e^{2\pi\beta}-1\right)}\frac{d\beta}{d\tau}. \quad (9)$$



а



б

Рис. 3. Формы образов МЭП на параметрических плоскостях χ и ξ

В силу (6), поскольку горизонтальный размер неровности ЭИ r = Re z_D,

$$r=\frac{R}{S_{st}}=s(\tau)\beta(\tau)+z_c(\infty,\tau)+z_a(\beta(\tau)+i,\tau), \quad (10)$$

где $\beta(\tau)$ – образ точки D, определяемый из этого уравнения. Из уравнения, получаемого дифференцированием (10), найдем производную

$$\frac{d\beta}{d\tau}=-\frac{\frac{\partial z_a}{\partial\tau}(\beta(\tau)+i,\tau)+\frac{\partial}{\partial\tau}z_c(\infty,\tau)+\beta(\tau)\left(-1+\frac{1}{s(\tau)}\right)}{s(\tau)+\frac{\partial z_a}{\partial\chi}(\beta(\tau)+i,\tau)}. \quad (11)$$

Функция $z_a(\chi,\tau)$ определяется следующим образом. Будем искать решение на границе $\chi = \sigma + i0$ в узловых точках σ_m ($m = 0,\ldots,n$). Заданными на каждом временном шаге будут значения $\operatorname{Im} z_a(\sigma_m, \tau_j) = y_m$. Примем $\operatorname{Im} z_a(\sigma_n, \tau) = 0$, поскольку $z_a(\sigma, \tau)$ быстро (как экспонента) убывает при $\sigma\to\infty$. Значения $\operatorname{Im} z_a(\sigma, \tau)$ в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна, имеющего две непрерывные производные.

Для восстановления функции $z_a(\chi, \tau)$ используем формулу Шварца с учетом того, что $z_a(\chi, \tau)$ аналитическая функция, имеющая чисто действительные значения на прямой $\operatorname{Im}\chi = 1$, и $\operatorname{Im} z_a(\sigma, \tau) = \operatorname{Im} z_a(-\sigma, \tau)$

$$z_a(\chi,\tau)=\operatorname{sh}\pi\chi\int_0^\infty \operatorname{Im} z_a(\sigma,\tau)\frac{d\sigma}{\operatorname{ch}\pi\sigma-\operatorname{ch}\pi\chi}. \quad (12)$$

Производная $\operatorname{Im}\frac{\partial z_a}{\partial\sigma}(\sigma,\tau)=-\operatorname{Im}\frac{\partial z_a}{\partial\sigma}(-\sigma,\tau)$, тогда

$$\frac{dz_a}{d\chi}(\chi,\tau)=\int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{\partial z_a}{\partial\sigma}(\sigma,\tau)\frac{\operatorname{sh}\pi\sigma}{\operatorname{ch}\pi\sigma-\operatorname{ch}\pi\chi}d\sigma. \quad (13)$$

Функция $z_c(\xi, \tau)$ получается аналогичным образом. Будем искать решение на границе $\xi=\omega+i$ в узловых точках ω_m ($m=0,\ldots,n$). Заданными будут значения $\operatorname{Im} z_c(\omega_m,\tau_j)=\bar{y}_m$. Примем $\operatorname{Im} z_c(\omega_n,\tau)=0$. Для восстановления функции $z_c(\xi, \tau)$ используем формулу Шварца с учетом того, что $z_c(\xi, \tau)$ аналитическая функция, имеющая чисто действительные значения на прямой $\operatorname{Im}\xi = 0$, и $\operatorname{Im} z_c(\omega + i, \tau) = \operatorname{Im} z_c(-\omega + i, \tau)$

$$z_c(\xi,\tau)=\operatorname{sh}\pi\xi\int_0^\infty \operatorname{Im} z_c(\omega+i,\tau)\frac{d\omega}{\operatorname{ch}\pi\omega+\operatorname{ch}\pi\xi}. \quad (14)$$

Производная

$$\frac{\partial z_c}{\partial\xi}(\xi,\tau)=-\int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{\partial z_c}{\partial\omega}(\omega+i,\tau)\frac{\operatorname{sh}\pi\omega}{\operatorname{ch}\pi\omega+\operatorname{ch}\pi\xi}d\omega. \quad (15)$$

3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Нестационарная задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений и решается численным методом. При этом на каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta_\tau$, $j = 1,2,\ldots,k$ решаются задачи конформного отображения полосы параметрической плоскости χ на физическую плоскость z. При этом задача конформного отображения в полном объеме решается только при $\tau = 0$. Значения переменных $y_m(\tau_{j+1})$ и $\bar{y}_m(\tau_{j+1})$ на следующем шаге по времени вычисляются с помощью частных производных $\frac{\partial y_a}{\partial\tau}(\sigma_m,\tau_j)$, $\frac{\partial y_c}{\partial\tau}(\omega_m,\tau_j)$. Частные производные по времени определяются при решении краевой задачи: найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial\tau}(\chi,\tau_j)$ как аналитическую функцию комплексного параметра χ, удовлетворяющую краевому условию [5]

$$\operatorname{Im}\left(\overline{\frac{\partial z}{\partial\sigma}}\frac{\partial z}{\partial\tau}\right)=-\operatorname{Im}\frac{\partial w}{\partial\sigma}. \quad (16)$$

Для вычисления производной $\frac{\partial z_a}{\partial\tau}(\chi,\tau_j)$ применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения $z_a(\chi, \tau_j)$. Искомыми параметрами на каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta_\tau$ будут значения $\operatorname{Im}\frac{\partial z_a}{\partial\tau}(\sigma_m,\tau_j)=q_m$. Значения $\operatorname{Im}\frac{\partial z_a}{\partial\tau}(\sigma,\tau_j)$ в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна $Q(\sigma, \tau)$. Для восстановления $\frac{\partial z_a}{\partial\tau}(\chi,\tau_j)$ используем формулу Шварца, аналогичную (12):

$$\frac{\partial z_a}{\partial\tau}(\chi,\tau)=\operatorname{sh}\pi\chi\int_0^\infty Q(\sigma,\tau)\frac{d\sigma}{\operatorname{ch}\pi\sigma-\operatorname{ch}\pi\chi}. \quad (17)$$

Для вычисления производной $\frac{\partial z_c}{\partial\tau}(\xi,\tau_j)$ также применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения $z_c(\xi, \tau_j)$. Искомыми параметрами на каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta_\tau$ будут значения $\operatorname{Im}\frac{\partial z_c}{\partial\tau}(\omega_m,\tau_j)=r_m$. Значения $\operatorname{Im}\frac{\partial z_c}{\partial\tau}(\omega,\tau_j)$ в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна $R(\omega,\tau)$. Для восстановления $\frac{\partial z_c}{\partial\tau}(\xi,\tau_j)$ используем формулу Шварца, аналогичную (14):

$$\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi,\tau)=\operatorname{sh}\pi\xi\int_0^\infty R(\omega,\tau)\frac{d\omega}{\operatorname{ch}\pi\omega+\operatorname{ch}\pi\xi}. \quad (18)$$

С учетом (3)–(9) определяются производные $\frac{\partial z}{\partial \sigma}, \frac{\partial z}{\partial \tau}$ при $\chi = \sigma + i0$ (на границе анода)

$$\frac{\partial z}{\partial \sigma}(\sigma,\tau)=s(\tau)+\frac{\partial z_a}{\partial \sigma}(\sigma,\tau)+\frac{\partial z_c}{\partial \xi}(\xi(\sigma),\tau)\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \tau}(\sigma,\tau)=-\frac{i}{s(\tau)}+\left(-1+\frac{1}{s(\tau)}\right)\sigma+\frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\sigma,\tau)+ \\ +\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi(\sigma),\tau)+\frac{\partial z_c}{\partial \xi}(\xi(\sigma),\tau)\frac{\partial \xi}{\partial \tau}. \quad (20)$$

На границе катода $\xi = \omega + i$ в системе координат, связанной с катодом,

$$z_{et}(\chi,\tau)=-is(\tau)+s(\tau)\chi+z_a(\chi,\tau)+z_c(\xi(\chi),\tau).$$

С учетом (3), (4) производные

$$\frac{\partial z_{et}}{\partial \sigma}(\sigma+i,\tau)= \\ =s(\tau)+\frac{\partial z_a}{\partial \sigma}(\sigma+i,\tau)+\frac{\partial z_c}{\partial \sigma}(\xi(\sigma+i),\tau), \quad (21)$$

$$\frac{\partial z_{et}}{\partial \tau}(\sigma+i,\tau)=\left(-1+\frac{1}{s(\tau)}\right)\sigma+\frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\sigma+i,\tau)+ \\ +\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi(\sigma+i),\tau)+\frac{\partial z_c}{\partial \xi}(\xi(\sigma+i),\tau)\frac{\partial \xi}{\partial \tau}. \quad (22)$$

Для вычисления $\frac{d\beta}{d\tau}$ (11) найдем производные

$$\frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\beta(\tau)+i,\tau)= \\ =-\operatorname{sh}\pi\beta(\tau)\int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\sigma,\tau)\frac{d\sigma}{\operatorname{ch}\pi\sigma+\operatorname{ch}\pi\beta(\tau)}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial z_a}{\partial \chi}(\beta(\tau)+i,\tau)= \\ =\int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{\partial z_a}{\partial \sigma}(\sigma,\tau)\frac{\operatorname{sh}\pi\sigma}{\operatorname{ch}\pi\sigma+\operatorname{ch}\pi\beta(\tau)}d\sigma, \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}z_c(\infty,\tau)=\int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\sigma+i,\tau)d\sigma. \quad (25)$$

Значения q_m, r_m определяются методом коллокаций по краевому условию (16) с учетом (19), (20) и того, что $\psi = \sigma$ (5),

$$\operatorname{Im}\left[\frac{\partial z}{\partial \tau}(\sigma_m)\overline{\frac{\partial z}{\partial \sigma}(\sigma_m)}\right]+1=0,\ m=0,\ldots,N-1. \quad (26)$$

На катоде краевое условие с учетом (21), (22) имеет вид

$$\operatorname{Im}\left[\frac{\partial z_{et}}{\partial \tau}(\omega_m)\overline{\frac{\partial z_{et}}{\partial \sigma}(\omega_m)}\right]=0,\ m=0,\ldots,N-1. \quad (27)$$

После решения системы линейных алгебраических уравнений (26), (27) и определения частных производных $\operatorname{Im}\frac{\partial z_a}{\partial \tau}=q_m$, $\operatorname{Im}\frac{\partial z_c}{\partial \tau}=r_m$ производится шаг по времени по методу предиктор-корректор второго порядка точности.

Далее снова повторяется процесс вычисления $\frac{\partial z_a}{\partial \chi}$, $\frac{\partial z_c}{\partial \xi}$, q_m, r_m и т. д.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные результаты представлены на рис. 4–7. На рис. 4 показаны формы поверхности при обработке полукруглым ЭИ с радиусом $r = 10$. Картина в системе координат, связанной с подвижной асимптотической поверхностью анода (рис. 4, *а*), показывает ход процесса растворения и позволяет увидеть установление стационарной формы обрабатываемой поверхности (которая была рассчитана заранее).

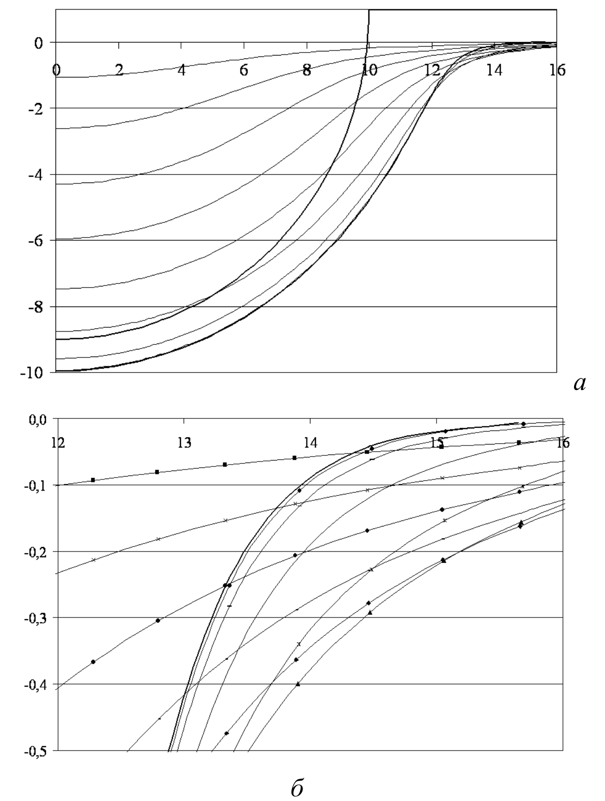


Рис. 4. Формы поверхности при обработке полукруглым ЭИ с радиусом $r = 10$ и шагом по времени $\Delta\tau = 2$: *а* – основная часть поверхности; *б* – фрагмент обрабатываемой поверхности вблизи излома ЭИ

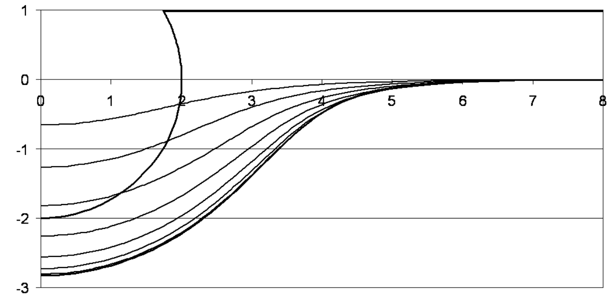


Рис. 5. Формы поверхности при обработке ЭИ в форме сегмента с радиусом $r = 2$ и с высотой $l = 3$ с шагом по времени $\Delta\tau = 1$

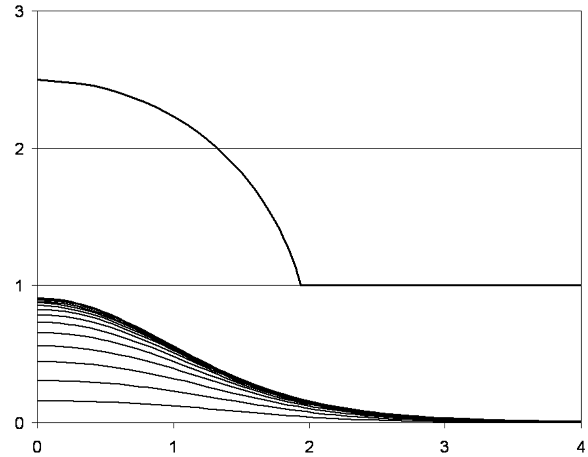
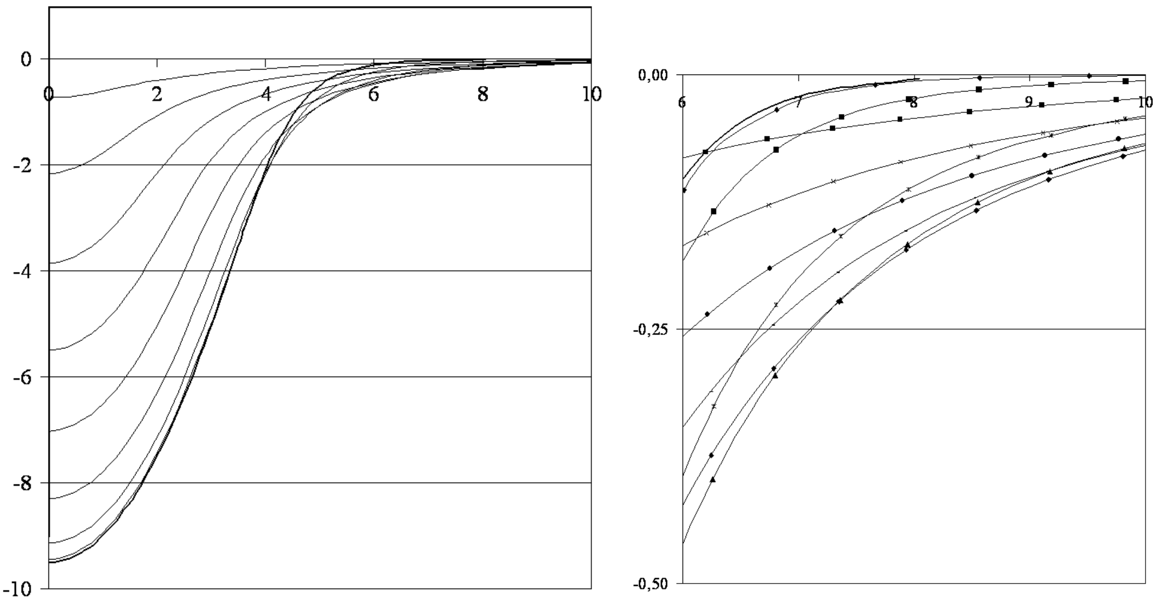


Рис. 6. Формы поверхности при обработке ЭИ с выемкой с радиусом $r = 2$ с шагом по времени $\Delta\tau = 1$



а *б*

Рис. 7. Формы поверхности обрабатываемой ЭИ в форме вертикальной пластины с высотой $l = 10$ с шагом по времени $\Delta\tau = 2$: *а* – основная часть поверхности; *б* – фрагмент обрабатываемой поверхности

Разработанный метод позволяет рассматривать ЭИ с выступом и впадиной, форма которых может варьироваться в широких пределах. В частности, на рис. 7 рассмотрен ЭИ в виде горизонтальной пластины, присоединенной к плоскому основанию.

На рис. 5 и 6 показаны формы нестационарной обрабатываемой поверхности при обработке ЭИ, имеющего выпуклость и впадину в форме сегмента круга. Во всех случаях наблюдается установление стационарной формы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе предложен численно-аналитический метод решения задач нестационарной электрохимической обработки при помощи плоского электрода-инструмента с выступом или выемкой криволинейной формы, основанный на аналитическом решении задачи определения частных производных координат по времени и разделении функций, определяющих неровности ЭИ и обрабатываемой поверхности. Рассмотрение численных примеров подтвердило высокую эффективность предложенного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Электрохимическое формообразование в условиях локальной изоляции анодной поверхности. I. Теоретический анализ / А. Н. Мустянцэ [и др.] // Электронная обработка материалов. Кишинев: Штиинца. 1989. № 3. С. 11–15.

2. **Котляр Л. М., Миназетдинов Н. М.** Эволюция формы анодной границы при электрохимической размерной обработке металлов // Прикладная механика и техническая физика. Новосибирск. 2004. Т. 45, № 4. С. 7–12.

3. **Volgin V. M., Davydov A. D.** Modeling of multistage electrochemical shaping // Journal of Materials Processing Technology. Elsevier. 2004. Vol. 149, No 1-3 4. P. 466–471.

4. 3D electrochemical machining computer simulations / M. Purcar [et al.] // Journal of Materials Processing Technology. Elsevier. 2004. Vol. 149, No 1–3. P. 472–478.

5. **Житников В. П., Зайцев А. Н.** Математическое моделирование электрохимической размерной обработки. Уфа: УГАТУ, 1996. 221 с.

ОБ АВТОРАХ

НЕТ ДАННЫХ!