ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

УДК 517.9

Мультипольное разложение фундаментального решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца

Н. С. Белевцов

nikitabelewtsov@mail.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Аннотация. Рассматривается дробно-дифференциальное обобщение уравнения Гельмгольца с дробной степенью оператора Лапласа. Выполняется построение фундаментального решения рассматриваемого уравнения с использованием интегральных преобразований Фурье и Меллина. Полученное фундаментальное решение представляется в интегральной форме, а также в терминах функций Фокса. Приводится факторизованное представление, а также мультипольное разложение фундаментального решения рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: дробная степень оператора Лапласа; дробно-дифференциальное обобщение уравнения Гельмгольца; фундаментальное решение; мультипольное разложение.

ВВЕДЕНИЕ

За последние годы уравнения с производными и интегралами дробного порядка все чаще используются исследователями в области математического моделирования в связи с возможностью описания разнообразных сложных процессов с аномальной кинетикой протекания [1]. Дробная степень оператора Лапласа [2] возникает в теории потенциала, гармоническом анализе, функциональном анализе, процессах Леви, а также во многих задачах математической физики. В работе [3] изучались диффузионные уравнения с дробной степенью оператора Лапласа. Независимые от времени формы данных уравнений приводят к дробно-дифференциальному обобщению уравнения Гельмгольца.

Для классического уравнения Гельмгольца было предложено огромное количество как аналитических, так и численных методов его исследования. Некоторые из этих методов основаны на использовании, так называемых, мультипольных разложений фундаментального решения рассматриваемого уравнения. Одним из таких методов является метод мультиполей [4]. Однако ранее данный метод не находил своего применения для построения численного решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца с дробной степенью оператора Лапласа.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассматривается дробно-дифференциальное обобщение неоднородного уравнения Гельмгольца вида

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u+\omega^2 u=f,\ \ u=u(x),\ \ f=f(x),\ \ x\in R^2,\ \ 1<\alpha<2, \tag{1}$$

где $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ – дробная степень оператора Лапласа [2], которая может быть определена через преобразование Фурье $\mathcal{F}$ как:

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x) = \mathcal{F}^{-1}(|k|^{\alpha}(\mathcal{F}u)(k))(x). \quad (2)$$

Решение уравнения (1) может быть представлено в виде:

$$u(x) = \int_{R^2} f(\xi)G_{\alpha}(x-\xi)d\xi. \quad (3)$$

Здесь $G_{\alpha}(x)$ – фундаментальное решение уравнения (1), которое удовлетворяет уравнению

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}G_{\alpha}(x) + \omega^2 G_{\alpha}(x) = \delta(x), \;\; x \in R^2, \;\; 1 < \alpha < 2, \quad (4)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Различные формы фундаментального решения могут быть получены с использованием интегральных преобразований Меллина и Фурье. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Фундаментальное решение уравнения (1) имеет интегральное представление:

$$G_{\alpha}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{k}{\omega^2 - k^{\alpha}} J_0(k|x|)dk, \quad (5)$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода. Интеграл в правой части (5) может быть записан в терминах функций Фокса:

$$G_{\alpha}(x) = C_{\alpha} H_{2,4}^{2,1}\left[\frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}}|x|^2}{4}\left|\begin{matrix}\left(1-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right)\\ (0,1),\left(1-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right),(0,1),\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right)\end{matrix}\right.\right], \quad (6)$$

где $C_{\alpha} = \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}-1}}{2^{\alpha}}$.

Доказательство. Применение двумерного преобразования Фурье к (4), с учетом (2), дает

$$G_{\alpha}(x) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{R^2} \frac{e^{-i\tau\cdot x}}{\omega^2 - |\tau|^{\alpha}} d\tau. \quad (7)$$

Так как $(\omega^2 - |\tau|^{\alpha})^{-1}$ является радиальной функцией, для представления (7) справедливо следующее свойство (см., например, [2]):

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} e^{-i\tau\cdot x}\psi(|\tau|)d\tau = \frac{|x|^{1-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^{\infty} k^{\frac{n}{2}}\psi(k)J_{\frac{n}{2}-1}(k|x|)dk, \quad (8)$$

где $\psi(k)$ — радиальная функция, а $J_{\nu}(z)$ — функция Бесселя первого рода. Применение (8) при $n = 2$ к (7) приводит к интегральному представлению (5).

Для получения представления (6) можно использовать интегральное преобразование Меллина

$$f^*(s) = (\mathcal{M}f(k))(s) \equiv \int_0^{\infty} f(k)k^{s-1}dk, \quad (10)$$

а также соответствующую теорему о свертке [2]

$$\mathcal{M}\left[\int_0^{\infty} kf_1(xk)f_2(k)dk\right](s) = f_1^*(s)f_2^*(2-s). \quad (11)$$

Интеграл в правой части (5) является сверткой (11) для функций

$$f_1(k) = J_0(k), \quad f_2(k) = \frac{1}{\omega^2 - k^{\alpha}}. \quad (12)$$

Их преобразования Меллина имеют вид:

$$f_1^*(s) = \frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}, \quad f_2^*(s) = \frac{\pi}{\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{\alpha}\right)}, \;\; 0 < \Re(s) < \alpha. \quad (13)$$

Здесь $\Gamma(s)$ – гамма-функция.

Применение обратного преобразования Меллина приводит к следующему представлению фундаментального решения в виде контурного интеграла Меллина-Барнса:

$$G_\alpha(x) = C_\alpha \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{2-2s}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2-2s}{\alpha}\right)}{\Gamma(1-s)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{2-2s}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{2-2s}{\alpha}\right)}\left(\frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}}|x|^2}{4}\right)^{-s} ds. \quad (14)$$

Интеграл (14) сходится при $0 < \gamma < \frac{\alpha}{2}$ и может быть записан в терминах функций Фокса [5] после применения к нему теоремы Коши о вычетах. В результате получается представление (6).

Замечание. Легко проверить, что в предельном случае $\alpha = 2$, $G_\alpha(|x|)$ совпадает с функцией Бесселя второго рода $\frac{1}{4}Y_0(\omega|x|)$, которая является фундаментальным решением классического уравнения Гельмгольца. *Теорема доказана.*

МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Для построения мультипольного разложения фундаментального решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца необходимо получить факторизованное представление фундаментального решения (6). Для этого может быть использовать подход, впервые предложенный в работе [6]. С использованием данного подхода была доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть (R,φ) и (r,ψ) являются полярными координатами точек x и ξ, соответственно, и также

$$G_\alpha(x-\xi) = G_\alpha(|x-\xi|) \equiv G_\alpha(z),$$

где $z = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}$, а $\theta = \varphi - \psi$. Тогда при $r < R$ справедливо факторизованное разложение (6) вида

$$G_\alpha(z) = C_\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{[\cos(n-2m)\theta]}{m!\,(n-m)!} \times$$
$$\times H_{2,4}^{2,1}\left[\frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}}R^2}{4}\middle|\begin{matrix}\left(1-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right)\\ \left(1-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right),(m,1),(n-m,1),\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right)\end{matrix}\right]. \quad (15)$$

Замечание. Легко получить, что в предельном случае $\alpha = 2$, функция Фокса в правой части (15) может быть записана в виде

$$H_{2,4}^{2,1}\left[\frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}}R^2}{4}\middle|\begin{matrix}(0,1),\left(-\frac{1}{2},1\right)\\ (0,1),(m,1),(n-m,1),\left(-\frac{1}{2},1\right)\end{matrix}\right]$$
$$= \left(\frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}}R^2}{8}\right)^n Y_{2m-n}\left(\frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}}R^2}{4}\right).$$

Также важно отметить, что при $m = 0, n = 0$ функция Фокса из (15) совпадает с фундаментальным решением (6).

Факторизованное разложение (15) легко позволяет сформулировать следующую теорему о мультипольном разложении.

Теорема 3. Пусть дано k точек x_i с полярными координатами (r_i,ψ_i), $i = 1,\ldots,k$, причем $r_i < a$, $0 < a < \infty$. Тогда для любой точки x с полярными координатами (R,φ) такой, что $R > a$, существует следующее мультипольное разложение

$$\Phi(R,\varphi,k) \equiv \sum_{i=1}^{k} q_i G_\alpha(x - x_i)$$

$$= c_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} R^{-n} H_{2,4}^{2,1} \left[\frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} R^2}{4} \middle| \begin{matrix} \left(1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \\ \left(1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), (m, 1), (n-m, 1), \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \end{matrix} \right]$$
$$\times [M_n^m(r_i, \psi_i, k)\cos(n-2m)\varphi + N_n^m(r_i, \psi_i, k)\sin(n-2m)\varphi], \quad (16)$$

где

$$M_n^m(r_i, \psi_i, k) = \frac{(-1)^m}{m!(n-m)!} \sum_{i=1}^{k} q_i r_i^n \cos(n-2m)\psi_i, \quad (17)$$

$$N_n^m(r_i, \psi_i, k) = \frac{(-1)^m}{m!(n-m)!} \sum_{i=1}^{k} q_i r_i^n \sin(n-2m)\psi_i. \quad (18)$$

Полученное мультипольное разложение может быть использовано для построения мультипольного алгоритма численного решения уравнения (1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено дробно-дифференциальное обобщение уравнения Гельмгольца с дробной степенью оператора Лапласа. С использованием интегральных преобразований Фурье и Меллина построено фундаментальное решение рассматриваемого уравнения в интегральной форме, а также в терминах функций Фокса. Предложены факторизованное представление и мультипольное разложение построенного фундаментального решения.

Мультипольное разложение позволяет разработать мультипольный алгоритм [4] численного решения рассматриваемого дробно-дифференциального уравнения Гельмгольца, позволяющий заметно увеличить скорость вычислений при численном счете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Учайкин В. В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.

2. Самко, С. Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

3. Stan D., del Teso F., Vázquez J. L. Finite and infinite speed of propagation for porous medium equations with fractional pressure //Comptes Rendus Mathematique. – 2014. – Т. 352. – №. 2. – С. 123-128.

4. Greengard L., Rokhlin V. A fast algorithm for particle simulations //Journal of computational physics. – 1987. – Т. 73. – №. 2. – С. 325-348.

5. Kilbas A. A. H-transforms: Theory and Applications. – CRC Press, 2004.

6. Belevtsov N. S., Lukashchuk S. Y. Factorization of the Fundamental Solution to Fractional Helmholtz Equation //Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Т. 42. – №. 1. – С. 57-62.

ОБ АВТОРЕ

БЕЛЕВЦОВ Никита Сергеевич, аспирант 2-го курса, ассистент каф. ВВТиС.

METADATA

Title: Multipole expansion of the fundamental solution for fractional Helmholtz equation.

Author: N. S. Belevtsov

Affiliation: Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: nikitabelewtsov@mail.ru

Language: Russian.

Source: Molodezhnyj Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), no. 1 (24), pp. 65-68, 2021. ISSN 2225-9309 (Print).

Abstract: A fractional generalization of the Helmholtz equation with fractional Laplacian is considered. Fundamental solution of the considered equation in integral form and in terms of Fox functions is constructed using Fourier and Mellin integral transforms. Factorized representation of the considered equation's fundamental solution and its multipole expansion are presented.

Key words: fractional Laplacian; fractional Helmholtz equation; fundamental solution; multipole expansion.

About author:

BELEVTSOV, Nikita Sergeevich, assistant Professor.