УДК 517.9

Численное моделирование течения вязкоупругой жидкости с дробно-дифференциальным реологическим уравнением состояния в квадратной каверне

А. В. Новиков

novikovav1994@gmail.com

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Аннотация. В статье рассматривается течение вязкоупругой жидкости с дробно-дифференциальным по времени реологическим уравнением состояния в квадратной каверне. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, направленных на исследование влияния параметров реологического уравнения состояния вязкоупругой жидкости на характер течения. Показывается, что применение порядка дробного дифференцирования в реологическом уравнении состояния приводит к качественной и количественной перестройке параметров течения.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость; дробно-дифференциальное реологическое уравнение состояния; производная дробного порядка; метод контрольных объемов; вычислительный эксперимент.

ВВЕДЕНИЕ

Вязкоупругая жидкость – вещество, которое при деформации проявляет свойства, схожие со свойствами вязких жидкостей и упругих твердых тел. Вязкоупругие жидкости активно используются в нефтяной промышленности при проведении гидроразрыва пласта (ГРП). ГРП – метод интенсификации скважины путем закачки смеси жидкости и расклинивающего агента (проппанта) [5, 8].

Моделирование процесса движения вязкоупругой жидкости отличается от моделирования движения обычной ньютоновской жидкости, так как необходимо использовать более сложные реологические соотношения между напряжением и деформацией.

Понимание процессов, происходящих при течении вязкоупругой жидкости, поможет прогнозировать поведение таких жидкостей в ГРП. При тестировании численных алгоритмов решения гидродинамических задач часто рассматривается течение жидкости в квадратной каверне. Имеющиеся результаты расчетов позволяют проверить работу новых численных алгоритмов для расчетов течения вязкоупругой жидкости.

Целью данной работы – провести численное моделирование течения вязкоупругой жидкости с дробно-дифференциальным по времени реологическим уравнением состояния в квадратной каверне.

Аппарат дробных производных применяется для модификации реологических соотношений для более точного описания движения конкретных вязкоупругих жидкостей и моделирования свойства эредитарности – способность запоминать информацию о своем предыдущем состоянии с течением времени [6].

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Простейшая модель вязкоупругой жидкости – одномерная модель Максвелла [1, 11]. Она была получена из предположения, что под действием одной и той же силы жидкость деформируется вследствие упругости и вязкости:

$$\tau + \frac{\eta_0}{E}\frac{d\tau}{dt} = \eta\frac{d\varepsilon}{dt}, \tag{1}$$

где E – модуль Юнга (Па), ε – деформация.

В трехмерном случае уравнение принимает иной вид:

$$\tau + \lambda\dot{\tau} = 2\eta_0 D, \tag{2}$$

В уравнении (2) производная тензора напряжений $\dot{\tau}$ определяется различными способами. Неопределенность в выборе формулы связана с тем, что уравнение (2) должно быть нейтральным относительно выбора системы отсчета [1, 10]. Для этого вводятся формулы яумановской, нижней конвективной и верхней конвективной производных, которые обеспечивают нейтральность уравнения [10].

Обобщение реологической модели Максвелла на трехмерный случай называется моделью с верхней конвективной производной [1]:

$$\tau + \lambda\left(\frac{\partial\tau}{\partial t} + v\cdot\nabla\tau - (\nabla v)^T\cdot\tau - \tau\cdot(\nabla v)\right) = 2\eta_0 D. \tag{3}$$

Величина $\frac{\partial\tau}{\partial t} + v\cdot\nabla\tau - (\nabla v)^T\cdot\tau - \tau\cdot(\nabla v)$ называется верхней конвективной производной.

Рассматривается двумерное движение жидкости в квадратной каверне в плоскости (x, y) с течением времени t. Размер каверны равен L. Предполагается, что жидкость течет с постоянной скоростью u_0 над каверной. В этом случае можно считать, что верхняя стенка каверны движется со скоростью u_0, но жидкость через эту стенку не перетекает.

Конечная система уравнений на скорости и давление с начальными условиями и граничными условиями имеет следующий вид:

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{y}} = 0, \tag{4}$$

Уравнения импульса:

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}} + \frac{\partial\left(\overline{u}^2\right)}{\partial\overline{x}} + \frac{\partial(\overline{vu})}{\partial\overline{y}} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}\right) + \frac{\partial}{\partial\overline{y}}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}\right) + \overline{S_{\phi1}}\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{t}} + \frac{\partial(\overline{uv})}{\partial\overline{x}} + \frac{\partial\left(\overline{v}^2\right)}{\partial\overline{y}} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{x}}\right) + \frac{\partial}{\partial\overline{y}}\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{y}}\right) + \overline{S_{\phi2}}\right), \tag{6}$$

где $\overline{S_{\phi1}} = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{x}} + \frac{\partial\overline{\tau}_{\overline{xx}}}{\partial\overline{x}} + \frac{\partial\overline{\tau}_{\overline{xy}}}{\partial\overline{y}} - \left[\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}\right) + \frac{\partial}{\partial\overline{y}}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}}\right)\right]$, $\overline{S_{\phi2}} = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{y}} + \frac{\partial\overline{\tau}_{\overline{xy}}}{\partial\overline{x}} + \frac{\partial\overline{\tau}_{\overline{yy}}}{\partial\overline{y}} - \left[\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{x}}\right) + \frac{\partial}{\partial\overline{y}}\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{y}}\right)\right]$. Параметр $Re = \rho u_0 L/\eta_0$ – число Рейнольдса.

Реологические уравнения состояния:

$$\begin{aligned} We\left(\beta\left(\frac{L}{u_0}\right)^{1-\nu} D_t^{\nu}\overline{\tau}_{xx} + \frac{\partial\left(\overline{u\tau_{\overline{xx}}}\right)}{\partial\overline{x}} + \frac{\partial\left(\overline{v\tau_{\overline{xx}}}\right)}{\partial\overline{y}}\right) &= \overline{S_{\phi3}}, \\ We\left(\beta\left(\frac{L}{u_0}\right)^{1-\nu} D_t^{\nu}\overline{\tau}_{\overline{xy}} + \frac{\partial\left(\overline{u\tau_{\overline{xy}}}\right)}{\partial\overline{x}} + \frac{\partial\left(\overline{v\tau_{\overline{xy}}}\right)}{\partial\overline{y}}\right) &= \overline{S_{\phi4}}, \\ We\left(\beta\left(\frac{L}{u_0}\right)^{1-\nu} D_t^{\nu}\overline{\tau}_{\overline{yy}} + \frac{\partial\left(\overline{u\tau_{\overline{yy}}}\right)}{\partial\overline{x}} + \frac{\partial\left(\overline{v\tau_{\overline{yy}}}\right)}{\partial\overline{y}}\right) &= \overline{S_{\phi5}}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\overline{S_{\phi3}} = 2\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}} + 2We\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}\overline{\tau}_{\overline{xx}} + \frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}}\overline{\tau}_{\overline{xy}}\right) - \overline{\tau}_{\overline{xx}}$, $\overline{S_{\phi4}} = \left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{x}}\right) + We\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}}\overline{\tau}_{\overline{yy}} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{x}}\overline{\tau}_{\overline{xx}}\right) - \overline{\tau}_{\overline{xy}}$, $\overline{S_{\phi5}} = 2\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{y}} + 2We\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{y}}\overline{\tau}_{\overline{yy}} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{x}}\overline{\tau}_{\overline{xy}}\right) - \overline{\tau}_{\overline{yy}}$. Параметр $We = \lambda u_0/L$ – число Вайсенберга.

$D_{\bar{t}}^{\nu}$ – дробная производная Римана-Лиувилля по времени, β – размерный коэффициент при дробной производной ($c^{\nu-1}$), ν – порядок дробной производной.

Начальные условия задачи:

$$\bar{u}(\bar{x},\bar{y},0)=\bar{v}(\bar{x},\bar{y},0)=0,$$
$$\bar{p}(x,\bar{y},0)=0, \tag{9}$$
$$\bar{\tau}_{\overline{xx}}(\bar{x},\bar{y},0)=\bar{\tau}_{\overline{xy}}(\bar{x},\bar{y},0)=\bar{\tau}_{\overline{yy}}(\bar{x},\bar{y},0)=0,$$

Граничные условия задачи:

$$\bar{u}(0,\bar{y},\bar{t})=\bar{v}(0,\bar{y},\bar{t})=\bar{u}(1,\bar{y},\bar{t})=\bar{v}(1,\bar{y},\bar{t})==0,$$
$$\bar{u}(\bar{x},0,\bar{t})=\bar{v}(\bar{x},0,\bar{t})=0,\bar{u}(\bar{x},1,\bar{t})=1,\bar{v}(\bar{x},1,\bar{t})=0,$$

Для реологических уравнений граничные условия задаются через граничные условия на скорости. Предполагается, что движение жидкости переходит в стационарное состояние, поэтому в граничных условиях отсутствуют производные напряжений по времени [7].

$$\bar{\tau}_{\overline{xx}}(0,\bar{y},\bar{t})=0,\bar{\tau}_{\overline{xy}}(0,\bar{y},\bar{t})=\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}},\bar{\tau}_{\overline{yy}}(0,\bar{y},\bar{t})=2We\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\right)^2,$$
$$\bar{\tau}_{\overline{xx}}(1,\bar{y},\bar{t})=0,\bar{\tau}_{\overline{xy}}(1,\bar{y},\bar{t})=\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}},\bar{\tau}_{\overline{yy}}(1,\bar{y},\bar{t})=2We\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\right)^2,$$
$$\bar{\tau}_{\overline{xx}}(\bar{x},0,\bar{t})=2We\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)^2,\bar{\tau}_{\overline{xy}}(\bar{x},0,\bar{t})=\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}},\bar{\tau}_{\overline{yy}}(\bar{x},0,\bar{t})=0. \tag{10}$$
$$We\frac{\partial\bar{\tau}_{\overline{xx}}}{\partial\bar{x}}\bigg|_{(\bar{x},1,\bar{t})}=2We\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\bar{\tau}_{\overline{xy}}(\bar{x},1,\bar{t})-\bar{\tau}_{\overline{xx}}(\bar{x},1,\bar{t}),$$
$$We\frac{\partial\bar{\tau}_{\overline{xy}}}{\partial\bar{x}}\bigg|_{(\bar{x},1,\bar{t})}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}+We\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\bar{\tau}_{\overline{yy}}(\bar{x},1,\bar{t})-\bar{\tau}_{\overline{xy}}(\bar{x},1,\bar{t}),$$
$$We\frac{\partial\bar{\tau}_{\overline{yy}}}{\partial\bar{x}}\bigg|_{(\bar{x},1,\bar{t})}=-\bar{\tau}_{\overline{yy}}(\bar{x},1,\bar{t}).$$

Для численного решения задачи (4)–(10) течения вязкоупругой жидкости в квадратной каверне используется метод конечных объемов с алгоритмом SIMPLE, который позволяет добиться консервативности разностных схем [3, 4].

Основная особенность численного моделирования вязкоупругой жидкости – аппроксимация источниковых членов и граничных условий. Необходимо рассчитывать средние значения производных скоростей $\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}$ и $\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}$, а также учитывать особенности геометрии сетки.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Течение в квадратной каверне для ньютоновской жидкости рассматривалось ранее в работах [2, 9]. Оно является стандартным для проверки работы численных алгоритмов решения гидродинамических задач. При числе Рейнольдса $Re \approx 1000$ в углах каверны наблюдаются вихри.

Для анализа течения вязкоупругой жидкости с дробно-дифференциальным по времени реологическим уравнением состояния были проведены численные эксперименты при различных параметрах числа Рейнольдса Re и порядка дробной производной ν.

Получены новые результаты расчетов течения вязкоупругой жидкости с дробно-дифференциальным по времени реологическим уравнением состояния. При использовании модели Максвелла с верхней конвективной производной с числом Вайсенберга $We = 0.01$ в каверне возникают три вихря, расположение которых отличается от случая ньютоновской жидкости. Один из вихрей в правом нижнем углу имеет достаточно малый размер.

С дробно-дифференциальной по времени реологической моделью состояния получен качественно новый результат. При числе Рейнольдса $Re \leq 100$ в правом нижнем углу каверны вихрь увеличивается в размерах при уменьшении порядка дробной производной. Это также подтверждают результаты расчетов зависимости гидравлического диаметра от порядка ν.

Для оценки размера вихря была использована формула гидравлического диаметра D_h, рассчитанная по формуле:

$$D_h = \frac{4S}{P}, \tag{11}$$

где S – площадь вихря, P – периметр границы вихря.

На рис. 1 построен график зависимости гидравлического диаметра от порядка дробной производной ν для числа Рейнольдса $Re = 100$:

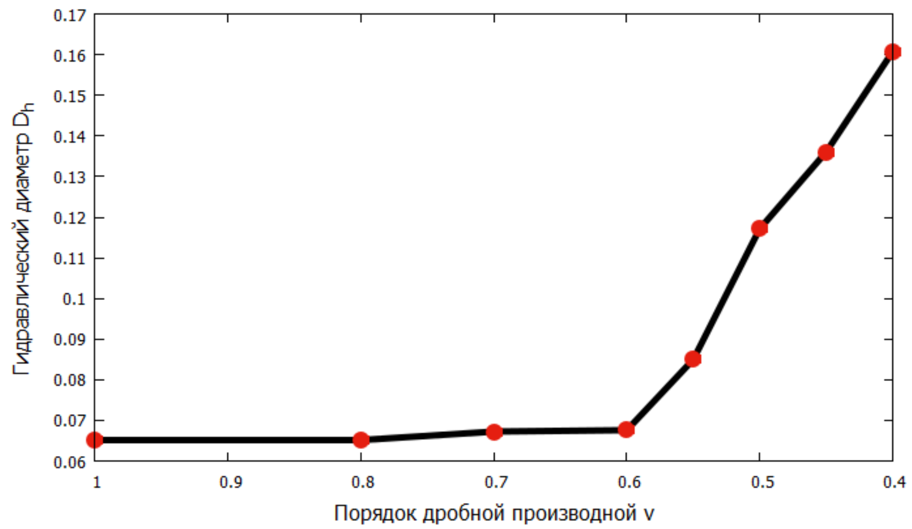

Рис. 1. График зависимости гидравлического диаметра D_h от порядка дробной производной ν

Данная модель дает такие результаты только в том случае, когда размерный коэффициент при дробной производной β сопоставим с числом Вайсенберга. Если число Вайсенберга достаточно мало, то влияние дробной производной на характер течения жидкости может оказаться несущественным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрено течение вязкоупругой жидкости с дробно-дифференциальным по времени реологическим уравнением состояния в квадратной каверне. Исследовано влияние различных параметров задачи, в том числе порядка дробного дифференцирования, на характер течения жидкости в каверне.

Получены новые результаты расчетов течения вязкоупругой жидкости с дробно-дифференциальным по времени реологическим уравнением состояния. Порядок дробного дифференцирования в реологическом уравнении состояния приводит к качественной и количественной перестройке параметров течения (изменяются размеры вихрей, возникающих в квадратной каверне).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астарита, Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей [Текст] : [пер. с англ.] / Дж. Астарита, Дж. Марруччи. – М. : Мир, 1978. – 312 с. – Перевод изд.: Principles of non-Newtonian fluid mechanics / Giovanni Astarita, Giuseppe Marrucci. Maidenhead, Berkshire.

2. Гуров, Д. Б. Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квазигидродинамической системы уравнений / Д. Б. Гуров, Т. Г. Елизарова, Ю. В. Шеретов // Математическое моделирование. 1996. Том 8(7). Стр. 33-44.

3. Калиткин, Н.Н. Численные методы [Текст] / Н.Н. Калиткин — М.: Наука, 1978. — 512 с.

4. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости [Текст] / Патанкар, С. – Москва: “Энергоатомиздат”, 1984. – 152. с. – Перевод изд.: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow / Suhas Patankar. Taylor & Francis, United States of America.

5. Гидравлический разрыв карбонатных пластов [Текст] / В. Г. Салимов [и др.] – М. : “Издательство «НЕФТЯНОЕ ХОЗЯЙСТВО»”, 2013. – 472 с. – 500 экз. – ISBN 978-5-93623-021-9.

6. Учайкин, В. В. Метод дробных производных [Текст] / В. В. Учайкин – Ульяновск : “Издательство «Артишок»”, 2008. – 512 с. : ил. (исправл.) – ISBN 978-5-904198-01-5.

7. Darwish, M.S. Numerical modelling of viscoelastic liquids using a FVM / M.S. Darwish, J.R. Whiteman, M.J. Bevis // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1992. Vol. 45. Pp. 311–337.

8. Economides, M.J. Reservoir Stimulation, 3rd Edition [Текст] / M.J. Economides, K.G. Nolte. — New York: Wiley, 2000. — 856 p.

9. Ghia, U. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method / U. Ghia, K. N. Ghia, C. T. Shin // Journal of Computational Physics. 1982. Vol. 48. Pp. 387-411.

10. Oldroyd, J.G. On the Formulation of Rheological Equations of State [Текст] / J.G. Oldroyd // Proceedings of the Royal Society of London A. 1950. Vol. 200. Pp. 523–541.

11. Owens, R. G. Computational Rheology [Текст] / Robert G. Owens, Timothy N. Phillips. – London : Imperial College Press, 2002. – 417 c. – ISBN 1-86094-186-9 (Imperial College Press).

ОБ АВТОРЕ

НОВИКОВ Александр Владимирович, аспирант 1-го курса УГАТУ.

METADATA

Title: Numerical simulation of a viscoelastic fluid flow with a fractional rheological equation of state in lid-driven cavity.

Author: A. V. Novikov

Affiliation: Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: novikovav1994@gmail.com

Language: Russian.

Source: Molodezhnyj Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), no. 1 (24), pp. 69-73, 2021. ISSN 2225-9309 (Print).

Abstract: The article presents a fractional rheological equation of state for viscoelastic fluid flow in lid-driven cavity. Results of computational experiments aimed at the research of an influence of different rheological equation parameters for viscoelastic fluid are given. It is show that the influence of fractional differential order in the rheological equation of state leads to a qualitative and quantitative restructuring of the flow parameters.

Key words: viscoelastic fluid; fractional rheological equation of state; fractional derivative; finite volume method; computational experiment.

About author:

NOVIKOV, Aleksandr Vladimirovich, postgraduate student 1 year.