

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В РАЗВЕТВЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

Л. Ю. ПРИВАЛОВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>lavrenty.privalov@gmail.com

ФГБНУ УФИЦ РАН Институт механики им. Р.Р. Мавлютова

**Аннотация.** В статье предложен алгоритм моделирования неустановившегося течения в разветвленной гидравлической системе, предназначенный для решения нестационарной модификации уравнения Бернулли, использующий в своей основе графы и соответствующие их вершинам и ребрам потенциалы. Реализована расчётная программа, апробированная на наборе различных тестов.

**Ключевые слова:** гидравлика; уравнение Бернулли; математическое моделирование; графы; нестационарное течение; подземные течения; системы трубопроводов.

### ВВЕДЕНИЕ

В задачах гидравлики часто возникают системы, которые могут быть упрощены до графа перетоков. Самым простым примером таких графов является система трубопроводов, течение в которой может быть упрощено до осевого. Более сложным вариантом служит система подземных течений, которая может быть представлена в виде графа известных притоков и неизвестных оттоков. Использование сеточного метода при решении задачи гидравлического расчёта неустановившегося течения в системах протяженной длины требует больших вычислительных мощностей, поэтому в данной работе предлагается описывать течение с помощью нестационарного уравнения Бернулли с динамическим слагаемым в силу его меньшей вычислительной сложности.

В работе рассматривается модель транспортировки неустановившегося однофазного потока жидкости от первоначального состояния гидравлической системы до момента установления потока (либо до достижения определенного момента времени). В основе алгоритма лежит модель неустановившегося течения реальной жидкости, описываемая уравнением Бернулли. Нестационарная модель позволяет проследить режим течения жидкости гидравлической системы в данном временном интервале, получить данные о возможных переходах между ламинарным и турбулентным режимами, оценить вероятность появления циклических режимов движения жидкости.

Большинство алгоритмов, основанных на уравнении Бернулли, рассматривают исключительно установившийся режим течения, даже если система перетоков является сложной, с большим числом ветвлений [1, 2]. Однако, при наличии циклов и достаточно большой положительной обратной связи могут возникать эффекты осцилляции, которые либо приведут к развалу стационарного решения, либо к совершенно неадекватному результату. С этой точки зрения, уравнение Бернулли с динамическим слагаемым [3] более корректно описывает неустановившийся поток и позволяет достаточно быстро получать решение в силу своей простоты.

УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ ПЕРЕТОКОВ

Дана нестационарная система перетоков несжимаемой однофазной жидкости. В основе предлагаемого алгоритма решения задачи лежат графы. Например, участок сложного трубопровода может быть преобразован в граф, соответствующий перетоку жидкости из одного узла в другой. Пример такого преобразования показан на рисунке 1а. Узлами графа считаются участки, которые могут иметь произвольное число притоков и оттоков, другими словами – ветвления, что продемонстрировано на рисунке 1б. Рёберными элементами графа считаются протяжённые потоки, количество жидкости в которых неизменно.

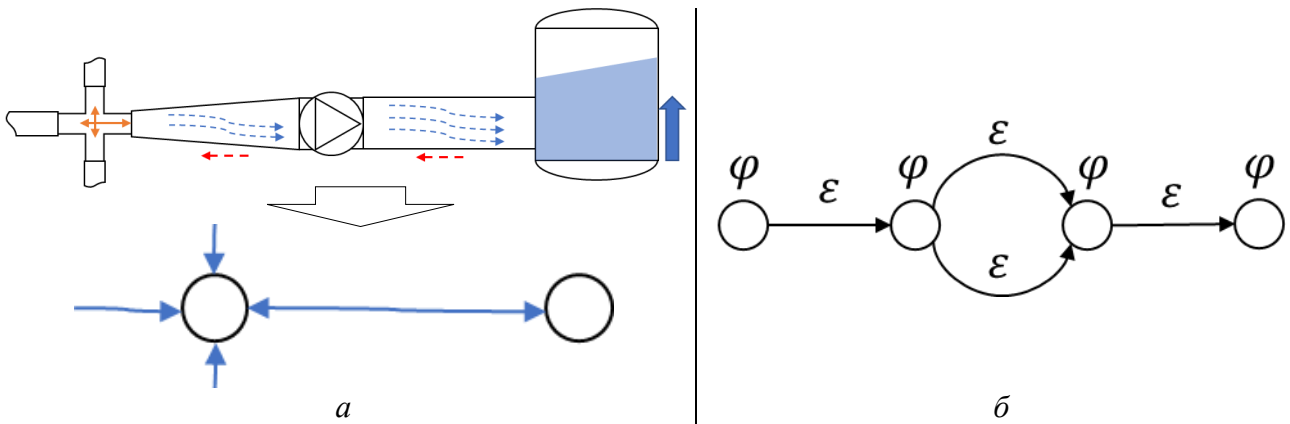


Рис. 1. Концепции графа перетоков: а) упрощение системы труб до графа; б) рёберные и узловые потенциалы

Проиллюстрируем принцип формирования системы уравнений для неустановившегося однофазного течения на примере, соответствующем графу перетоков, изображённому на рис. 1б. Связь двух узлов может быть описана уравнением, полученным элементарным преобразованием уравнения Бернулли [3]:

$$\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho g} + \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) + \frac{h(z, p, Q, \rho)}{g} = 0, \tag{1}$$

где  $\Delta z$  – разница высот между узлами,  $\Delta p$  – разница давлений,  $Q$  – объёмный расход в ребре графа,  $S_1, S_2$  – поперечное сечение на концах участка, представимого в виде двух узлов и ребра между ними,  $h(z, p, Q, \rho)$  – другие внутренние силы (например, трение, сопротивление).

Особое внимание следует обратить на слагаемое  $h(z, p, Q, \rho)$ . В нестационарном случае появляется сопротивление, связанное с инерцией массы жидкости строго вдоль потока, которое может быть выражено в виде интеграла

$$\frac{h_{\text{инерц}}(Q')}{g} = \frac{1}{g} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial v}{\partial t} dx = \frac{Q'}{g} \int_{l_1}^{l_2} \frac{1}{S(x)} dx. \tag{2}$$

Преобразование  $v = \frac{Q}{S}$  позволяет упростить интеграл до необходимости нахождения единственной метрики  $\gamma = \int_{l_1}^{l_2} \frac{1}{S(x)} dx$ . Однако, поскольку интегрирование должно осуществляться вдоль устойчивого потока, поперечные сечения должны браться с учётом движения массы жидкости при локальном режиме течения, а не только с учетом геометрии ёмкости. Чаще всего метрика инертности массы жидкости может быть найдена эвристически, лишь иногда аналитически, в силу сложности её нахождения для турбулентного течения.

Таким образом, подставляя (2) в (1), получаем дифференциальное уравнение изменения скорости потока между двумя узлами:

$$Q' = \frac{-1}{\gamma} \left( g\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho} + \frac{Q^2}{2} \left( \frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) + h_{\text{тр}} \right). \tag{3}$$

Последовательные соединения элементов можно просуммировать. Очевидно, что вдоль последовательной цепи без ветвлений объёмный расход  $Q$  сохраняется. Таким образом, уравнение (1) с учётом (2), записанное для  $N$  последовательных элементов, можно привести к виду:

$$\begin{aligned} (z_N - z_1) + \frac{(p_N - p_1)}{\rho g} + \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{S_N^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{h_{\text{тр}i}}{g} + \frac{Q'}{g} \sum_{i=1}^N \gamma_i &= 0; \\ \Delta z + \frac{\Delta p}{\rho g} + \frac{Q^2}{2g} \Delta \frac{1}{S^2} + \frac{H_{\text{тр}}}{g} + \frac{Q'}{g} \Gamma &= 0; \\ Q' &= \frac{-1}{\Gamma} \left( g \Delta z + \frac{\Delta p}{\rho} + \frac{Q^2}{2} \Delta \frac{1}{S^2} + H_{\text{тр}} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Как можно видеть, добавление элементов к последовательной цепи требует не более чем суммирования коэффициентов при этих элементах. В случае, когда появляются ветвления можно провести параллель с электрической цепью (см. рис. 1б). В цепи есть результирующие потенциалы  $\varphi_i$ , расположенные в вершинах, и движущие потенциалы  $\varepsilon_j$ , расположенные между вершинами. Можно выделить потенциалы  $\varphi$  и  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \Delta z, h_0 &\leftrightarrow \varphi; \\ \Delta \frac{1}{S^2}, \Delta p, H_{\text{тр}}, \Gamma &\leftrightarrow \varepsilon. \end{aligned} \quad (5)$$

где  $h_0$  – дополнительные узловые потенциалы, если таковые необходимы.

На основании такого разделения на графе  $G=(V,E)$  уравнение (4) для некоторого ребра с индексом  $i$  можно упростить до вида

$$Q'_i = \frac{-1}{\Gamma_i} (\varphi_{m(i)} - \varphi_{n(i)} + \varepsilon_i), m(i), n(i) \in E_i; \quad (6)$$

где  $\varphi_j = g(z_j + h_{0j})$ ,  $\varepsilon_i = \frac{\Delta p_i}{\rho} + \frac{Q_i^2}{2} \Delta \frac{1}{S_i^2} + H_{\text{тр}i}$ .

Наконец, для несжимаемой жидкости должно сохраняться количество жидкости, протекающей через некоторый узловой элемент  $k$  по смежным рёбрам  $E_j$ , т.е.

$$\sum_{i \in \{E_j | V_k \in E_j\}} Q_i = 0.$$

Однако, прямая подстановка (6) привела бы к интегральному уравнению, численное решение которого довольно трудоемко. Идентичное условие можно получить, если использовать дифференциальное уравнение, дополненное начальным условием следующего вида:

$$\sum Q'_i = 0, \sum Q_i(0) = 0. \quad (7)$$

В этом случае выражение для  $Q'_i$  уже известно и определяется уравнением (6). Учитывая этот факт, уравнения для вершин (7) и рёбер (6) могут быть собраны в систему следующего вида:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i \in V_j} \frac{\varphi_{m(i)} - \varphi_{n(i)}}{\Gamma_i} &= - \sum_{i \in V_j} \frac{\varepsilon_i}{\Gamma_i}, m(i), n(i) \in \{E_i \vee V_j \in E_i\}, \varepsilon_i = \text{const}, \end{aligned} \right. \quad (8.1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q'_j &= \frac{g}{\Gamma_j} (\varphi_{m(j)} - \varphi_{n(j)} + \varepsilon_j), m(j), n(j) \in E_j. \end{aligned} \right. \quad (8.2)$$

Данную систему уравнений можно рассматривать как состоящую из двух частей: из условно линеаризованной системы (8.1), где зависимый от  $Q$  потенциал  $\varepsilon$  считается константой; и из системы ОДУ (8.2). Набор уравнений (8.2) может быть решён с помощью итеративной численной схемы интегрирования (например, неявной схемы Эйлера, Гаусса-Лежандра). Тяговые потенциалы  $\varepsilon$  явно и напрямую зависят от скорости потока  $Q$ , поэтому итерации чис

ленной схемы производятся относительно потенциалов  $\varepsilon$ . В свою очередь потенциалы  $\varphi$  подчиняются системе уравнений баланса (8.1), поэтому каждое промежуточное вычисление  $\varepsilon$ , производимое численной схемой, приводит к необходимости находить соответствующие промежуточные  $\varphi$ , используя линейную часть системы. Очевидно, что погрешность численного решения системы (8.1-8.2) определяется только погрешностью численной схемы, используемой для решения (8.2), т.е. представляет собой величину  $O(t, Q_4)$  для схемы Гаусса-Лежандра, рассматриваемой далее.

Таким образом, для выполнения одного временного шага, считая, что начальное состояние уже было задано, необходимо выполнить следующий алгоритм.

1. Принять некоторые начальные значения для  $Q_i^{k+1/2} = Q_i^k$  и  $\varphi_j^{k+1/2} = \varphi_j^k$ .
2. При заданных промежуточных значениях потенциалов  $\varepsilon_i(Q_i^{k+1/2})$  с помощью выбранной схемы численного интегрирования найти  $\varphi_j^{k+1/2}$ , используя уравнение (8.1) системы.
3. При новых  $\varphi_j^{k+1/2}$  найти следующее приближение скорости потоков  $Q_i^{k+1/2}$ , используя второй набор уравнений (8.2).
4. По достижении условия остановки (определяемого заданной точностью решения) или предельного числа итераций завершить вычисление нового шага, принять  $Q_i^{k+1} = Q_i^{k+1/2}$  и  $\varphi_j^{k+1} = \varphi_j^{k+1/2}$ . Иначе, вернуться к шагу 2.

Благодаря А-устойчивости схемы Гаусса-Лежандра, решение гарантировано существует для всех  $\varepsilon \in C$  и шагов по времени  $\Delta t$ , соответствующих реальной скорости процесса.

#### АПРОБАЦИЯ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМА НА СИСТЕМЕ ВАЛИДАЦИОННЫХ ТЕСТОВ

На основе приведенного выше алгоритма была написана расчетная программа. Все вычисления производились на персональном компьютере. Алгоритм не был каким-либо образом распараллелен или оптимизирован. Несмотря на необходимость решать систему линейных алгебраических уравнений каждую итерацию численной схемы, суммарное время решения не превышало нескольких секунд.

Апробация алгоритма была проведена с помощью серии тестов: простые, для подтверждения согласованности с элементарными законами физики; сложные, для сравнения нестационарного решения в асимптотическом пределе с решением аналогичных задач в стационарной постановке.

К простым относились такие задачи, как падение столба жидкости и сохранение количества жидкости в ветвлениях. О них достаточно сказать, что ускорение течения при свободном падении вертикально вниз сравнялось с ускорением свободного падения при отсутствии сопротивлений (что подтвердило корректность слагаемого  $h_{инерц}$ ), а сохранение количества жидкости при перетоке с ветвлением, продемонстрировало отличную консервативность и показало погрешность порядка  $O(t^4, Q^4)$  ( $10^{-11}$  от кумулятивной невязки при шаге по времени порядка  $5 \cdot 10^{-3}$ ).

Первым из более сложных тестов было сравнение с задачей из сборника по гидравлике [4], визуальная схема которой представлена на рисунке 2а. Условие задачи формулировалось следующим образом: из бака А истекает вода со скоростью  $Q_1^0 = 3,2$  л/с, высота столба жидкости  $H_1 = 7,4$  м, избыточное давление  $p_1$ . Для двух других баков  $H_2 = 4$  м,  $H_3 = -0,6$  м. Трубы имеют длину 6 м, диаметр 30 мм, и сопротивления  $\lambda_r = 0,03$  и  $\zeta_k = 3,5$ , влияние которых описано в соответствующем разделе задачника.

Численное решение производилось при шаге по времени 0,005 с.

Характер истечения жидкости оценивался при помощи соотношений  $Q_2/Q_1$  и  $Q_3/Q_1$ . Аналитическим решением задачи являлись следующие значения:  $Q_2^0 = 0,858$  л/с,  $Q_3^0 = 2,342$  л/с. При этом  $Q_2^0/Q_1^0 \approx 0,268125$ ,  $Q_3^0/Q_1^0 \approx 0,731875$ . Нестационарное решение, полученное с помощью разработанной программы в момент установления течения получилось следующим:

$Q_1 = 1,258$  л/с,  $Q_2 = 0,244$  л/с,  $Q_3 = 0,101$  л/с, то есть  $Q_2/Q_1 \approx 0,194156$ ,  $Q_3/Q_1 \approx 0,805844$ . Направления движения жидкости получились верными и скорость истечений имела тот же порядок, а соотношения потоков оказались сравнительно недалеко.

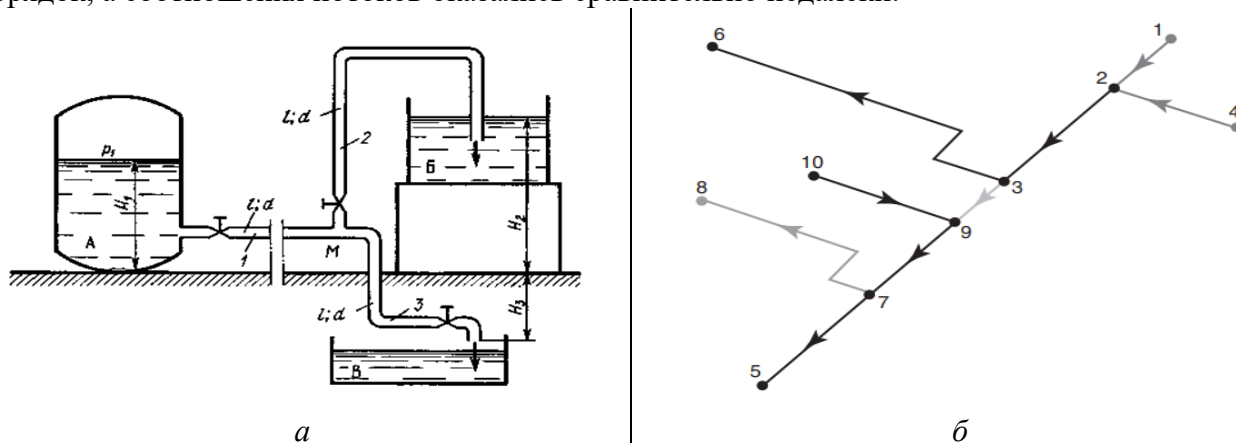


Рис. 2. Схемы апробационных тестов задачи из сборника [4] - (а) и транспорта многофазного течения [1] - (б).

Некоторое заметное различие было объяснено условием аналитической задачи, при котором фиксируется скорость истечения  $Q_1^0$ . Данное допущение возможно в стационарном случае и невозможно в нестационарном, поскольку принудительная фиксация скорости потока влечёт не только огромную численную погрешность, но приводит к нежелательному эффекту самокорректировки системы под внешние воздействия. Поэтому, полученное численное решение необязательно должно было совпасть с аналитическим в точности, оно устремилось асимптотически к аналитическому решению спустя некоторое время, необходимое для становления режима течения (приблизительно 0,3 с для рассматриваемой задачи).

Тестирование на примере второй задачи (рис. 2б) носило скорее качественный характер, так как в оригинальной статье [1] решалась стационарная задача с заданными режимами течениями, но для случая газожидкостной смеси (вода и пар без учета фазовых переходов) с учетом изменения температуры на отдельных участках. Отметим, что в стационарном случае потоки жидкости на некоторых участках были фиксированы, чего было крайне сложно добиться в нестационарном. Данные примера из статьи были внесены в вычислительную программу. Шаг по времени был установлен  $\Delta t = 0.05$ с, было учтено сопротивление Дарси.

Полученные на различных участках результаты вычислений в сравнении с результатами, приведенными в [1], представлены в табл. 1. В целом течение в участках 1-2, 2-3, 3-9, 10-9, 7-8, 3-6 и 4-2, в момент становления качественно согласовалось с данными из [1]. Разница решений на остальных участках была объяснена, во-первых, учетом термодинамики и многофазности в модели, рассматриваемой в [1], а во-вторых, отсутствием информации о входном и выходном гидравлических давлениях. Несмотря на это все потоки имели корректное направление и вполне сопоставимый массовый расход.

Таблица 1

Погрешность позиционирования откалиброванной системы

Метод	Расход в ветви, кг/ч								
	1-2	2-3	3-9	10-9	9-7	7-8	7-5	3-6	4-2
Стац. [1]	1565,9	3790,9	190,9	2809,2	3000,1	1000,0	3000,0	3000,0	1625,1
Нестац.	982,1	1964,3	541,6	1308,7	1850,4	672,0	1178,3	1422,7	982,1

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен алгоритм гидравлического расчета для разветвленных систем неустановившихся перетоков жидкости, представляемый в графах, основанный на нестационарной модификации уравнения Бернулли. Алгоритм успешно апробирован на простых тестах

(свободное падение столба жидкости, сохранение количества жидкости) и на более сложных задачах: с аналитической задачей с жёстко заданным условием для скорости истечения жидкости из сборника [4] и с задачей гидравлического расчета в разветвленном участке трубопровода из сторонней статьи [1] для оценки различий со стационарным многофазным потоком.

В результате тестирования было установлено, что алгоритм обладает хорошей производительностью, если скорость реального процесса мала. Несомненным плюсом алгоритма и программы является тот факт, что задание дополнительных условий имеет простой принцип добавления элементов в граф, указания их свойств и связей с другими элементами в графе. А полученное решение позволяет проследить весь процесс становления потока от начала до конца, выявить закономерности переходных процессов, или, если процесс не может установиться (например, при наличии циклов в графе), показать динамику изменения параметров системы. Кроме того, для учёта местных сопротивлений имеется возможность задания произвольной функции гидравлического потенциала для рёбер и вершин графа, что позволяет, например, учесть сопротивление на изгибах, ветвлениях и других сопротивлениях, если их характеристики известны.

В дальнейшем планируется усовершенствовать алгоритм в следующих аспектах: учесть многофазность, теплообмен, сжимаемость при больших скоростях и давлениях; реализовать границы раздела жидкости и воздуха. Также, в связи с наличием жёстко заданных массовых или объёмных расходов, имеет смысл сформулировать и решить обратную задачу нахождения параметров системы на основании расходов, задаваемых в определённых участках. Обратная задача может позволить определить приблизительный граф перетоков подземных течений при достаточном количестве экспериментальных данных.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко А. В., Гартман Т. Н., Корельштейн Л. Б. Расчет потокораспределения для двухфазного газожидкостного течения в промышленных разветвленных трубопроводах // Технологии нефти и газа. — №3. — 2012. — С. 29–33.
2. Mayakova S., Privalov L. Thermal and hydraulic calculation in a model of industrial branched pipeline transporting a single-phase liquid flow *Topical Problems of Agriculture, Civil and Environmental Engineering (TPACEE 2020): proceedings E3S Web Conf.* – EDP Science, 2020. – Vol. 224, № 01048. – 1,031 MB. URL: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202022401048>.
3. Агеева В.В. Гидравлика. Часть 2. Гидродинамика: учебное пособие / В.В. Агеева — Н. Новгород: Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т, 2011. — 81 с.
4. Некрасов Б.Б. Задачник по гидравлике гидромашин и гидроприводу: Учеб. пособие для машиностроит. спец. вузов / Б. Б. Некрасов, И. В. Фатеев, Ю. А. Беленков и др.; под ред. Б.Б. Некрасова. — М.: Высш. шк., 1989. — 192 с.

#### ОБ АВТОРАХ

**ПРИВАЛОВ Лаврентий Юрьевич**, аспирант института механики УФИЦ РАН.

#### METADATA

**Title:** Flow distribution dynamics in ramified systems.

**Affiliation:** Institute of Mechanics at Ufa Federal Research Centre of The Russian Academy of Sciences.

**Email:** <sup>1</sup>lavrenty.privalov@gmail.com

**Language:** Russian.

**Source:** *Molodezhnyj Vestnik UGATU* (scientific journal of Ufa University of Science and Technology), no. 1(27), pp. 116-121, 2023. ISSN 2225-9309 (Print).

**Abstract:** In the article a graph-based hydraulic flow computation algorithm using unsteady Bernoulli equation is presented. The algorithm for finding force potential including the sequence of required steps is derived and described. A program that makes use of the algorithm is written and tested on a set of various reference problems. A similarity between unsteady and analytical or numerical steady solutions is shown.

**Key words:** hydraulics; Bernoulli equation; mathematical modelling; graphs; unsteady flow; groundwater flow; pipeline systems.

**About authors:**

**PRIVALOV, Lavrentii Yurievich**, postgraduate student, Institute of Mechanics at Ufa Federal Research Centre of The Russian Academy of Sciences.