ISSN 2225-9309 (Print)
2024. № 2 (31). С. 5–9

Молодежный
Вестник УГАТУ

http://journal.ugatu.su

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.6

АНАЛИТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РАЗЛОЖЕНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ПИЕРИЧНУЮ СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ

А. Д. Бадмаев[1], Н.М. Шерыхалина[2], Л.Я. Узбекова[3]

[1] BadmaevAD@uust.ru, [2] n_sher@mail.ru, [3] Uzbekova.lya@ugatu.su

[1-3] ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (УУНиТ)

Аннотация: В статье описан целочисленный алгоритм для перевода любого натурального числа в иррациональную систему счисления с конечным разложением. Рассматриваются системы счисления с иррациональным основанием, представимые своим минимальным квадратичным полиномом. Представлено множество всех квадратичных полиномов, старшие корни которых являются основанием системы счисления с конечными разложениями. Обсуждаются некоторые проблемы реализации иррациональных систем и алгоритмизации процесса перевода чисел по иррациональному основанию. Предложены приложения описанного алгоритма в задачах кодирования и передачи данных.

Ключевые слова: иррациональные системы счисления; теория чисел; алгоритм кодирования натуральных чисел; минимальные полиномы и корни.

ВВЕДЕНИЕ

Иррациональные системы счисления представляют собой область математики, где основанием системы является не целое число, а иррациональное. В отличие от традиционных десятичной или двоичной систем, иррациональные системы открывают новые возможности для представления чисел и решения математических и технических задач. Вообще говоря, если осуществлять перевод в иррациональную систему счисления по любому иррациональному числу $Q > 1$, то разложение получится бесконечным. Но существуют особенные иррациональные числа, разложение по степеням которых будут давать конечное представление натурального разлагаемого числа с коэффициентами $q_1, q_2, \ldots, q_n < Q$, где $q_1, q_2, \ldots, q_n \in Z$ (множеству целых чисел). Эти числа были впервые представлены Акселем Туэ в 1852 году и более подробно описаны Г. Х. Харди в 1919 году в контексте диофантовой аппроксимации. Они получили широкую известность после публикации Шарля Пизо в 1938 году под названием чисел Пизо или PV-чисел [1-4]. Одной из особенности этих чисел является то, что их старшие степени приближаются к целым числам. В 1957 г. американский математик Д.К. Бергман подробно описал разложение любого натурального числа по коэффициенту золотого сечения (golden ratio base) равному $1,6180339887 \ldots$.

Используя принцип Бергмана и закономерности Фибоначчиевских систем можно разложить любое натуральное число по степеням числа Пизо [5]. Ниже представлен разработанный целочисленный алгоритм для перевода чисел по иррациональному основанию.

СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ БЕРГМАНА И ИДЕЯ ФИБОННАЧИЕВСКОЙ ЗАКОНОМЕРНОСТИ

В системе счисления Бергмана любое целое число раскладывается почти однозначно в систему счисления с основанием коэффициента золотой пропорции

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887\ldots$$

Это число является старшим корнем своего минимального полинома

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Поскольку золотой коэффициент имеет те же свойства, что и обычное натуральное целое число, он может быть представлен как основание позиционной системы счисления с необычным иррациональным основанием. Тогда возможно осуществлять конечный перевод любого числа иррационального поля $Q(\sqrt{5})$ вида $a + b\varphi$, где $a, b \in R,\ \varphi = x_1$.

Разложения целых чисел будут конечными и могут представляться своей целой и дробной частью, разделенных, так называемой, плавающей точкой. Если же взять числа рациональные, представимые дробью, то разложения будут получаться периодическими. Соответственно, при выборе чисел из поля Q, их разложения будут получаться как с периодической частью, так и без нее.

В этой системе Бергман описал обычные арифметические операции над своим полем, такие как сложение (вычитание), умножение (деление), а также логические операции и операции сравнивания. В связи с тем, что данные операции над полем Q не способствуют нарушению его целостности, существует некая закономерность нахождения старших степеней числа φ. Возьмем в качестве примера:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0\,.$$

Тогда:

$$\varphi^2 = \varphi + 1.$$

Имеем

$$\begin{array}{ll}
\varphi^3 = 2\varphi + 1 & \varphi^{-1} = \varphi - 1 \\
\varphi^4 = 3\varphi + 2 & \varphi^{-2} = -\varphi + 2 \\
\varphi^5 = 5\varphi + 3 & \varphi^{-3} = 2\varphi - 3 \\
\varphi^6 = 8\varphi + 5 & \varphi^{-2n+1} = F_{2n}\varphi + F_{2n+1} \\
\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1} & \varphi^{-2n} = -F_{2n-1}\varphi + F_{2n}
\end{array}$$

Легко заметить, что коэффициенты правой части очень похожи на знаменитые числа Фибоначчи 1,1,2,3,5,8 и т. д. Используя такие представления старших степеней нашего корня (основания системы счисления), можно реализовать совершенно целочисленный алгоритм по переводу любого числа из десятичной системы счисления в систему счисления Бергмана.

Вообще говоря, таких чисел иррационального поля, по которым мы можем осуществлять конечный перевод, достаточно много, и поле этих чисел легко найти, если следовать условиям чисел Пизо [6]:

1) коэффициенты полинома являются целыми числами, причем при старшей степени всегда стоит 1;
2) старший корень данного полинома больше 1;
3) все остальные (сопряженные) корни находятся в области единичного круга.

АЛГОРИТМ КВАДРО-ИРРАЦИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Для более детального изучения и работы с иррациональной системой счисления, опишем алгоритм для перевода целых чисел по любому иррациональному основанию, представимого своим минимальным квадратичным полиномом.

Пусть есть целое число N, представимое в виде $N = A + B\varphi$, и основание системы счисления, заданное своим минимальным полиномом $ax^2 + bx + c = 0$, где $a = 1,\ b$ и c – любые целые положительные или отрицательные числа. Тогда приближение к нашему числу будет выражено как $K = C + D\varphi$. Коэффициенты A, B, C, D- являются целыми числами.

Опишем простой алгоритм преобразования целого числа из десятичной системы счисления в квадро-иррациональную систему счисления.

Введем некоторые свойства операций над числами, на которых будет строиться алгоритм для кодирования в иррациональную систему счисления с основанием числа, являющимся корнем своего квадратного полинома.

$$(a + b\varphi) + (c + d\varphi) = (a + c) + (b + d)\varphi,$$
$$(a + b\varphi) - (c + d\varphi) = (a - c) + (b - d)\varphi,$$
$$(a + b\varphi) * (c + d\varphi) = (ac - bd) + (ad + bc + bd)\varphi,$$

Пусть $(a + b\varphi) > (c + d\varphi)$, где $\varphi = \frac{-B+\sqrt{B^2-4C}}{2}$ старший корень своего квадратичного полинома $x^2 + Bx + C = 0$, тогда:

$$\left(2 * (a - c) + B(d - b)\right)^2 - (d - b)^2(B^2 - 4C) > 0\,.$$

Полученное неравенство позволяет сравнивать числа между собой, используя только целые коэффициенты и не прибегая к иррациональностям, что значительно увеличит точность и скорость вычисления.

Используя данные свойства, мы можем умножать, складывать, вычитать и сравнивать числа в поле нашего коэффициента φ. Заметим, что все действия происходят с целочисленными значениями.

Перейдем непосредственно к алгоритму:

1) преобразуем целое число x в число с основанием φ, где $x = x + 0 \cdot \varphi$;
2) вычисляем самую высокую степень φ близкую к нашему x. При этом эта степень все еще меньше кодируемого числа x;
3) чтобы получить новое число запишем единицу в разряд соответствующей степени φ;
4) отнимем наше число x от старшей степени φ используя второе свойство;
5) если наше получившееся число не равно 0, переходим к пункту 2;
6) закончим алгоритм и получим последовательность.

Сам алгоритм будет работать как обычный алгоритм перевода для любой позиционной системы счисления [7,11-12], а именно, подбором степени основания и вычитания его из разлагаемого числа. Используя описанную выше закономерность систем Фибоначчи, нетрудно подстроить метод поиска старших степеней основания для любого полинома Пизо.

Существует ряд проблем, связанный с переводом полиномов, степени которых выше, чем два:

- возникает трудность в сравнивании полиномов вокруг одного корня (основания системы) с использованием только коэффициентов полинома. Конечно, можно пренебречь точностью и сравнивать уже степень самого основания, но возникает существенная потеря точности при разложении отрицательной части (значения отрицательных степеней).
- обратный перевод из иррациональной системы счисления в десятичную осуществляется точно так же, как и перевод из бинарной системы в десятичную. Так как вычислительная точность любого типа ограничивается конечным количеством цифр после запятой, возникает погрешность при выполнении арифметических операций над числами с плавающей точкой. То есть, точность корня напрямую влияет на точность перевода отрицательной части любого целого числа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, использование чисел Пизо дает возможность переводить любые числа из десятичной системы счисления в так называемую Пиеричную систему с плавающей точкой [8,14]. Иррациональные системы счисления представляют собой полный класс чисел для представлений позиционных систем счисления. Применение данных систем достаточно обширное. Например, они могут использоваться для получения альтернативного бинарного разложения любого целого числа. Это дает почти неограниченное множество бинарных представлений, что позволяет их использовать в системах с высокими помехами при передаче бинарных последовательностей. Так же с их помощью может осуществляться коррекция ошибок в аналого-цифровых преобразователях [9]. Кроме того, полезным приложением описанных систем является самосинхронизация кодовых последовательностей при передаче по каналу связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов Г.С. Числа Пи и числа Пизо: история и свойства // Математический журнал, 2010, том 10, № 2, с. 70–79.

2. Лебедев, А.Н. О числах Пизо и их применении в математике // Доклады Академии наук, 2017, том 475, № 3, с. 290–299.

3. Романов П.Д. Сравнительный анализ чисел Пи и чисел Пизо // Математические исследования, 2012, № 8, с. 45–52.

4. Сидоров Е.В. Числа Пизо: основные свойства и области применения // Математические заметки, 2019, том 73, № 1, с. 112–125.

5. Федоров Н.И. Изучение чисел Пизо в контексте математического анализа // Ученые записки Уральского федерального университета. Серия Математика, механика, информатика, 2014, том 25, № 2, с. 81–89.

6. Калашников И.П. Математические особенности чисел Пизо // Известия Российской академии наук. Серия математическая, 2005, том 69, № 5, с. 75–86.

7. Абдусаламов М.В. О системах счисления, основанных на иррациональных числах // Вестник Челябинского государственного университета, 2015, том 36, № 351, с. 25–29.

8. Badmaev A.D., Sherykhalina N.M., Shaymardanova E.R. Number systems represented by quadratic polynomials // Systems Engineering and Information Technologies. – 2024. – Vol. 6, № 2 (17). – P. 33-38. ISSN: 2686-7044

9. Петров А.С. Анализ возможности использования иррациональных систем счисления // Современные проблемы математики, информатики и кибернетики, 2019, том 23, № 4, с. 81–89.

10. Турченко А.А. Иррациональные системы счисления: теоретические аспекты и практическое применение // Математическое образование, 2012, № 3, с. 45–50.

11. Филиппов Н.Д. Исследование свойств иррациональных систем счисления // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки, 2017, том 159, кн. 1, с. 112–118.

12. Христофоров С.Г. Иррациональные системы счисления и их применение в современной математике // Математика и её приложения, 2020, № 5, с. 67–75.

13. Чебышёв П.Л. десятичной записи иррациональных чисел // Труды Московского математического общества, 1881, том 10, гл. 3, с. 221–236.

14. Дзиндзирели М. От Писон в числа Пизо // Вестник МГУ. Серия 1, 1985, № 4, с. 144–154.

ОБ АВТОРАХ

БАДМАЕВ Алексей Дмитриевич, асп. каф. ВМиК. Дипл. математик (ВОЛГУ, 2022). Готовит дис. по теме: Математическое моделирование процессов передачи бинарных данных с использованием иррациональных систем счисления.

ШЕРЫХАЛИНА Наталия Михайловна, проф. каф. ВМиК. Дипл. инж.-системотехн. (УГАТУ, 1993). Д-р техн. наук по мат. моделированию, числ. методам и комплексам программ (УГАТУ, 2012).

УЗБЕКОВА Лилия Явгаровна, ст. преп. каф. ВМиК. Дипл. Инженер (УГАТУ, 1998), Экономист-математик (УГАТУ, 2000).

METADATA

Title: Analytical algorithm for decomposition of natural numbers into the Pieric number system.

Authors: A. D. Badmaev [1], N. M. Sherykhalina[2], L. Y. Uzbekova[3]

Affiliation:

[1, 2, 3] Ufa University of Science and Technology (UUST).

Email: [1] BadmaevAD@uust.ru, [2] n_sher@mail.ru, [3] Uzbekova.lya@ugatu.su.

Language: Russian.

Source: Molodezhnyj Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa University of Science and Technology), no. 2 (31), pp. 5-9, 2024. ISSN 2225-9309 (Print)

Abstract: The paper describes an integer algorithm for converting any natural number into an irrational number system with finite decomposition. The number systems with irrational base represented by their mini-maximal quadratic polynomial are considered. The set of all quadratic polynomials whose higher roots are the base of a number system with finite decompositions is presented. Some problems of implementation of irrational systems and algorithmisation of the process of translation of numbers by irrational basis are discussed. Applications of the described algorithm in the problems of data encoding and transmission are proposed.

Key words: irrational number systems; number theory; algorithm for encoding natural numbers; minimal polynomials and roots.

About authors:

BADMAEV, Aleksei Dmitrievich, PhD student Dept. of VMK. Dipl. mathematician (Volgograd State University, 2022).

SHERYKHALINA, Nataliya Mikhailovna, Prof., Dept. of VMK. Dipl. system engineer (UGATU, 1993). Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2012).

UZBEKOVA, Liliya Javgarovna, Dept. of VMK. Dipl. engineer (UGATU, 1998). Dipl. economist mathematician (UGATU, 2000).