ISSN 2225-9309 (Print)
2024. № 2 (31). С. 105–109
Молодежный
Вестник УГАТУ
http://journal.ugatu.su

УДК 519.6

Математическое и программное обеспечение решения задачи обтекания воздухоопорной оболочки

Р. О. Сайфуллин[1], **Е. Р. Шаймарданова**[2]

[1] ugatu.saifullin@gmail.com, [2] shaymardanova.ekaterina.04@gmail.com

[1, 2] ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (УУНиТ)

Аннотация. В статье представлена математическая модель процесса обтекания воздухом гибкой конструкции типа ангара. Математическое моделирование формы воздухоопорной оболочки проводится с помощью теории функций комплексного переменного. Область течения на физической плоскости и плоскости комплексного потенциала связывается через параметрическую плоскость с помощью конформных отображений. Для решения задачи применяются видоизмененный метод Леви-Чивиты и метод коллокаций. Для уточнения численного решения и оценки погрешности используется метод численной фильтрации.

Ключевые слова: математическая модель; воздухоопорная оболочка; свободная поверхность; метод Леви-Чивиты; метод коллокаций.

ВВЕДЕНИЕ

Задача об обтекании воздухоопорной оболочки в настоящее время является важной и актуальной. Воздухоопорные оболочки активно используются в строительстве и различных надувных инженерных конструкциях типа ангаров. Постройки, конструкции которых основаны на воздухоопорных оболочках, сравнительно легки в возведении и эксплуатации и не уступают в практичности жестким конструкциям из металла и других материалов. Основной проблемой является поддержание жёсткости конструкций, поэтому важен расчёт характеристик и параметров оболочки.

Математическое моделирование процессов гидродинамики и аэродинамики имеет богатую историю [1-2]. Существует несколько подходов к решению данной задачи и наработок по теме воздухоопорных оболочек [3-4]. Но аналитического решения задачи не существует, поэтому все математические модели являются в той или иной степени упрощенными и имеют свои преимущества и недостатки.

В данной работе используется математическая модель, основанная на видоизмененном методе Леви-Чевиты.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Схема воздухоопорной оболочки в разрезе представлена на рис.1, а. Конструкция в форме полого цилиндра поддерживается давлением P_0 внутри неё и окружена жидкостью или газом с давлением P_0 снаружи. Та часть поверхности оболочки, которая непосредственно контактирует с жидкостью или газом, называется смоченной, на схеме она обозначена линией AC.

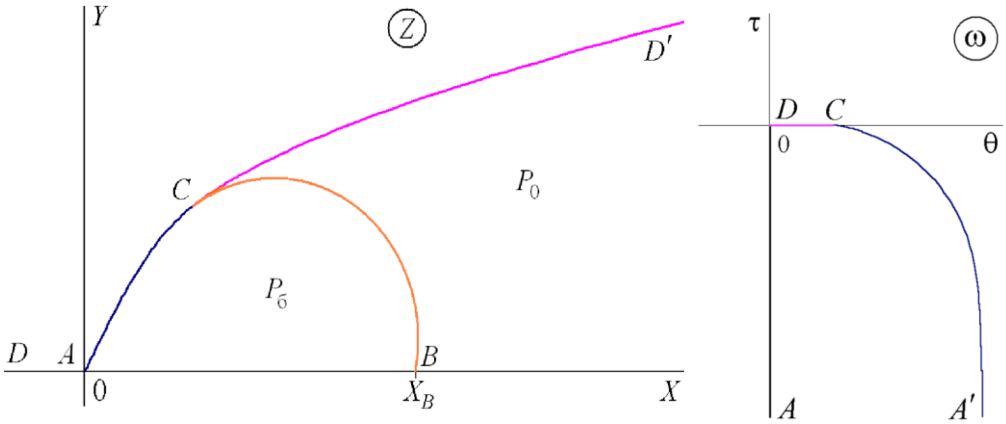

Рис. 1. Взаимодействие идеального газа с оболочкой:
а – физическая плоскость; б – плоскость изменения ω.

Для сохранения структурной целостности оболочки важно равновесие между внутренним и внешним давлением, которое достигается за счёт натяжения оболочки T при определённом радиусе кривизны R

$$T = R(P_б - P) = const.$$

При анализе надувных конструкций, подверженными воздействию воздушного потока, возникающие перепады давления минимальны. Следовательно, воздух ведёт себя как несжимаемая жидкость, что позволяет нам применить принцип Бернулли для связи изменений давления с изменениями скорости

$$\rho\frac{V^2}{2} + P = P^*, \qquad \rho\frac{V_o^2}{2} + P_0 = P^*, \tag{1}$$

где введены следующие условные обозначения: P – давление в потоке; V – модуль вектора скорости жидкости; ρ – плотность жидкости; P_0, V_0, – давление и модуль скорости на свободной поверхности; P^* – константа Бернулли.

Используем дифференциальный подход, чтобы выразить равновесное состояние оболочки

$$T = \pm\left(\frac{d\theta x}{ds}\right)^{-1}\left(P_б - P^* + \rho\frac{V^2}{2}\right),$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\rho V_0^2}{2T}\left(\mu - 1 + \left|\frac{V}{V_0}\right|^2\right), \qquad \mu = \frac{P_b - P_0}{P^* - P_0}. \tag{2}$$

Здесь θ представляет собой угол, образованный вектором скорости относительно оси X, а s обозначает криволинейную координату, начиная с точки A. Важно отметить, что в уравнении (2) отрицательный знак принят из-за наблюдаемого уменьшения наклона вектора скорости к направлению потока, когда μ превышает 1, как показано на рис. 1, б.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения применим методы теории функций комплексного переменного, аналогичные [5-6].

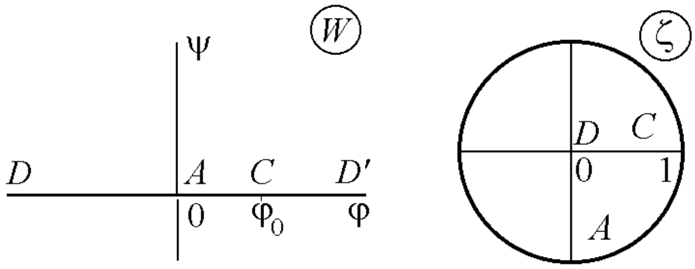

Рис. 2. Формы образов области течения:
а – на W; б – на параметрической плоскости.

На рис. 2, а показано, как выглядит область течения на W, на рис. 2, б область течения изображена на параметрической плоскости ζ. Формулировка комплексного потенциала W и его производной по ζ представлена следующим образом

$$W = \frac{\phi_0}{4}\left(\frac{1}{\zeta^2} + \zeta^2 + 2\right),$$

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{\phi_0}{2}\left(-\frac{1}{\zeta^3} + \zeta\right) = \frac{\phi_0}{2\zeta}\left(\zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2}\right).$$

Рассматривая отрезок, AC, где $\zeta = e^{i\sigma}$, $\frac{-\pi}{2} \le \sigma \le 0$, производная W по σ вычисляется как

$$\frac{dW}{d\sigma} = -\phi_0 \sin 2\sigma.$$

Поскольку $\frac{dW}{dZ} = Ve^{-i\theta}$, мы можем ввести функцию Жуковского

$$\omega = i \ln \frac{1}{V_0}\frac{dW}{dZ} = \theta + i\tau,$$

$$\tau = \ln \frac{V}{V_0}.$$

Функция ω будет удовлетворять граничным условиям соответственно рис. 1, б.

– Вещественная часть Re ω равна нулю на DA;

– Мнимая часть Im ω равна нулю на CD';

– Соответствие уравнению Бернулли на AC.

Развивая методику, предложенную Леви-Чивитой, ω разлагается в сумму

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2,$$

где, с учётом угловых разрывов в точках перегиба границы, ω_0 определяется как

$$\omega_0 = \beta i \ln \frac{1 - i\zeta}{1 + i\zeta} = \beta i \ln \frac{-\zeta - i}{-i + \zeta} = \beta i \ln \frac{\zeta + i}{\zeta - i} - \pi\beta.$$

Чтобы соблюсти граничные условия, сформулируем $\omega_1(\zeta)$ следующим образом

$$\omega_1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1}\zeta^{2m+1}$$

Введение новой функции $\omega_2(\zeta)$, не присутствующей в обычном подходе, служит для включения основной составляющей особенности производной $\frac{d\theta}{d\sigma}$ в окрестности $\sigma = -\frac{\pi}{2}$

$$\omega_2 = B_1\zeta\left(\frac{\zeta^2 + 1}{2}\right)^{2-\beta}.$$

Далее выводим дифференциал

$$dZ = \frac{1}{V_0} e^{i\omega} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta = \frac{\phi_0}{V_0} e^{i\omega(\zeta)} \frac{1}{2\zeta}\left(\zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta.$$

Отсюда находим

$$X_C = \frac{\phi_0}{V_0} x_C = \frac{\phi_0}{V_0} \int_{AC} \operatorname{Re} d\,z\,, \qquad Y_C = \frac{\phi_0}{V_0} y_C = \frac{\phi_0}{V_0} \int_{AC} \operatorname{Im} d\,z.$$

Если центральный угол дуги CB назвать α, а углы наклона касательной в точках A, B и C θ_A, θ_B и θ_C, общая длина L оболочки ACB определяется следующим образом

$$L = \frac{\phi_0}{V_0}\left(\int_{AC} |dz| + \frac{2\alpha}{\lambda\mu}\right), \qquad dZ = \frac{\phi_0}{V_0} dz.$$

Полученный набор уравнений решается численно с помощью метода коллокаций. Применение метода численной фильтрации позволило уточнить рассчитываемые результаты на несколько порядков [7-10].

Программа, в которой были реализованы решение системы уравнений, полученной методом коллокаций, и уточнение результатов методом численной фильтрации была написана на языке Python3, для повышения эффективности и точности вычислений была использована библиотека NumPy.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя конформные отображения и дополненный вариант метода Леви-Чевиты, в исследовании предлагается численный подход к решению проблемы течения вокруг оболочки, вызванного потоком идеальной жидкости. Результаты показывают, что давление и скорость жидкости имеют максимальные или минимальные значения в определённых точках. Эти события возникают, когда поток плавно отделяется от оболочки. Алгоритм фильтрации значительно повышает точность полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Галина И.Л.** Истечение струи из канала с гибким ограждением // Прикл. матем. и мех. 1979. Т.43. №1. С.91–98.
2. **Гуревич М.И.** Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979, 536с.
3. **Житников В.П., Терентьев А.Г.** Струйное обтекание гибкой оболочки потоком идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1982. – №6. – С. 43-48.
4. **Соколова А.А.** Кавитационное обтекание оболочки по несимметричной схеме Рябушинского // Межвузовский научный конгресс. Высшая школа: Научные исследования. Москва, 27 сентября, 2019г. Изд. Инфинити. С. 220 – 230.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
6. **Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Муксимова Р.Р.** Дополнительные главы теории функций комплексного переменного: учебное электронное издание локального доступа // Уфа: УГАТУ, 2014. – 85 с. № гос. регистрации 0321402284.
7. **Житников В.П., Шерыхалина Н.М.** Моделирование течений весомой жидкости с применением методов многокомпонентного анализа. Акад. Наук Респ. Башкортостан, Отд-ние техн. наук. Уфа : Гилем, 2009. -335с.
8. **Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Соколова А.А.** Оценка погрешности и ее обоснование с помощью фильтрации численных результатов, полученных при разных числах узловых точек сетки // Известия Самарского научного центра РАН. 2017. Т.19, № 1(2). С. 401–405.
9. **Sherykhalina N.M., Saifullin R.O., Shaymardanova E.R.** Multidimensional polynomial interpolation // Systems Engineering and Information Technologies. – 2023. – Vol. 5, № 4 (13). – P. 94-100.
10. **Sherykhalina N.M., Shaymardanova E.R.** Comparison of accuracy of the Cauchy problem solutions by different numerical methods // Systems Engineering and Information Technologies. – 2023. – Vol. 5, № 6 (15). – P. 11-16.
11. **Sokolova A.A., Shaymardanova E.R., Sherykhalina N.M., Porechny S.S**. Researching of influence of rotation angle of tool electrode for electrochemical machining of material // Systems Engineering and Information Technologies. – 2024. – Vol. 6, № 1 (16). – P. 16-22.

ОБ АВТОРАХ

САЙФУЛЛИН Руслан Олегович, студент МО ИИМРТ УУНиТ.

ШАЙМАРДАНОВА Екатерина Ринатовна, студент МО ИИМРТ УУНиТ.

METADATA

Title: Mathematical and software support for solving the problem of air-supported shell flowing.

Authors: R.O. Saifullin[1], E.R. Shaymardanova[2]

Affiliation:

[1, 2] Ufa University of Science and Technology (UUST), Russia.

Email: [1] ugatu.saifullin@gmail.com, [2] shaymardanova.ekaterina.04@gmail.com

Language: Russian.

Source: Molodezhnyj Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa University of Science and Technology), no. 2 (31), pp. 105-109, 2024. ISSN 2225-9309 (Print).

Abstract: The paper presents a mathematical model of the process of airflow of a flexible structure of hangar type. Mathematical modelling of the shape of the air-supported shell is carried out using the theory of functions of complex variable. The flow area on the physical plane and the plane of complex potential is connected through the parametric plane by means of conformal mappings. To solve the problem, the modified Levy-Civita method and the collocation method are used. The numerical filtering method is used to refine the numerical solution and to estimate the error.

Key words: mathematical model; air-supported shell; free surface; Lévy-Civita method; collocation method.

About authors:

SAIFULLIN, Ruslan Olegovich, student MS IIMRT UUST.

SHAYMARDANOVA, Ekaterina Rinatovna, student MS IIMRT UUST.