ISSN 2225-9309 (Print)
2025. № 3 (34). С. 121–125

Молодежный
Вестник УГАТУ

http://journal.ugatu.su

УДК 519.2

doi 10.54708/22259309_2025_334121

Математические парадоксы теории вероятностей

А. Р. Башарова[1]

[1]aigulbasharova337@gmail.com

[1]ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (УУНиТ)

Аннотация. В статье рассматриваются математические парадоксы теории вероятностей (парадокс Монти Холла и парадокс дней рождений). Для демонстрации используются математические расчеты и компьютерные симуляции, включая имитацию 10 000 испытаний с помощью языка программирования Python. Выводы статьи помогают осознать случайности, которые происходят гораздо чаще, чем кажется.

Ключевые слова. теория вероятностей; парадокс Монти Холла; парадокс дней рождений.

.

ВВЕДЕНИЕ

Математические парадоксы – явления, для которых интуитивные решения чаще являются неверными, что и дает ощущение «нелогичности». Рассмотренные задачи наглядно демонстрируют, что некоторые ситуации происходят гораздо чаще, чем обычно предполагается.

Актуальность данной статьи заключается в том, что на данный момент, в эпоху большого количества информации, необходимо осознанно понимать, где правда, а где дезинформация. Поэтому в данном тексте рассмотрено 2 парадокса: парадокс Монти Холла и парадокс дней рождений, для которых интуитивное решение ощущается неверным.

ПАРАДОКС МОНТИ ХОЛЛА. РАЗБОР ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ПАРАДОКСА

Задача Монти Холла – это классический пример, демонстрирующий аспекты условной вероятности и применения теоремы Байеса. В этой головоломке игрок стоит перед выбором одной из трех дверей, за одной из которых спрятан ценный приз – автомобиль, а за двумя другими – менее желательные призы, например, козы.

Игрок делает первоначальный выбор, скажем, дверь № 1. Затем ведущий, который знает, где находится автомобиль, открывает одну из оставшихся дверей (например, № 3), за которой гарантированно находится коза. После этого ведущий предлагает игроку изменить свой выбор и выбрать другую, не открытую дверь. Главный вопрос: стоит ли игроку менять свое решение? Увеличит ли это его шансы на выигрыш автомобиля?

Но необходимо сделать оговорки по условию задачи:

1. Шансы найти автомобиль за любой из дверей равны.
2. После выбора двери игроком ведущий обязан открыть дверь, за которой находится коза, и предложить ему изменить свой первоначальный выбор.
3. Ведущий случайным образом выбирает одну из оставшихся дверей.

Многие люди испытывают трудности с пониманием двух ключевых моментов в парадоксе Монти Холла. Первый: почему, после того как ведущий открывает дверь с козой, вероятность выбора не становится равной 50 % на 50 %? Почему переключение выбора дает 2 из 3 шансов на победу, а сохранение первоначального выбора – только 1 из 3? Второй: почему, если игрок случайно открывает дверь с козой, то вероятность остаться при своем выборе становится равной вероятности смены выбора (50 % на 50 %)? Теорема Байеса позволяет объяснить эти кажущиеся противоречия.

Для данной конкретной формулировки можно составить таблицу, в которой обозначим автомобиль как Приз 1, а козу как Приз 2. Тогда данная таблица есть таблица вероятности выигрыша и проигрыша при смене выбора или его отсутствии (табл. 1).

Таблица 1

Вероятность выигрыша при смене выбора и его отсутствии в зависимости от дверей

Д № 1	Д № 2	Д № 3	Результат, если менять выбор	Результат, если не менять выбор
Приз 1	Приз 2	Приз 2	Приз 2	Приз 1
Приз 2	Приз 1	Приз 2	Приз 1	Приз 2
Приз 2	Приз 2	Приз 1	Приз 1	Приз 2

Схематично суть этой задачи представлена на рис. 1.

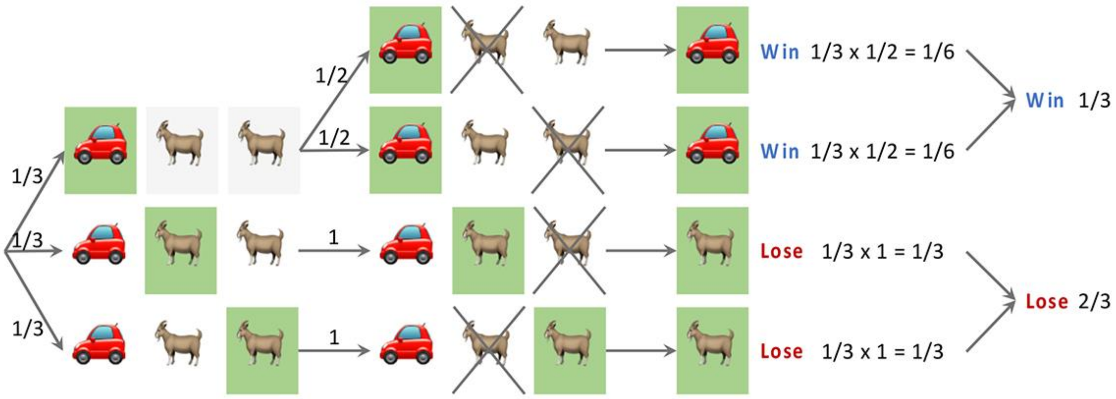

Рис. 1 Визуальное отображение парадокса

Согласно представленной таблице, вероятность выигрыша при смене выбора составляет $P(A) = \frac{2}{3}$, а при сохранении первоначального выбора $P(B) = \frac{1}{3}$. Таким образом, смена выбора оказывается более выгодной стратегией для получения приза.

Рассмотрим ситуацию с 1000 дверей. После того как игрок сделал свой первоначальный выбор, ведущий открывает 998 дверей, за которыми скрывается отсутствие приза, оставляя только две двери: выбранную игроком и одну оставшуюся.

На первый взгляд, кажется, что вероятность выигрыша составляет 50 %, однако это не так. Решение задачи аналогично предыдущей: выигрыш при сохранении первоначального выбора возможен только в том случае, если игрок изначально выбрал автомобиль. Вероятность этого события составляет всего 0,001. Соответственно вероятность выигрыша при смене выбора равна 0,999.

Этот пример наглядно показывает, что наши интуитивные представления могут вводить в заблуждение. Поэтому в подобных ситуациях рекомендуется полагаться на математический анализ, а не на собственные ощущения.

Для задачи с 3 дверями был написан код для её симуляции на 10000 испытаний, используя библиотеку random в языке программирования Python (рис. 2).

```python
import random

def monty_hall_simulation(trials=100000):
    wins_with_switch = 0
    wins_without_switch = 0

    for _ in range(trials):
        # Размещение приза
        doors = [0, 0, 0]  # 0 - коза, 1 - приз
        prize_pos = random.randint(0, 2)
        doors[prize_pos] = 1

        # Выбор игрока
        choice = random.randint(0, 2)

        # Действия ведущего
        remaining_doors = [i for i in range(3) if i != choice and doors[i] == 0]
        opened = random.choice(remaining_doors)

        # Смена выбора
        new_choice = [i for i in range(3) if i != choice and i != opened][0]

        # Подсчет результатов
        if doors[new_choice] == 1:
            wins_with_switch += 1
        if doors[choice] == 1:
            wins_without_switch += 1

    print(f"Побед при смене выбора: {wins_with_switch/trials:.2%}")
    print(f"Побед без смены: {wins_without_switch/trials:.2%}")

monty_hall_simulation()
```

Рис. 2 Код для симуляции задачи на 10000 испытаний

Для данной симуляции существует график, который показывает частоту выигрыша при смене и отсутствии (рис. 3).

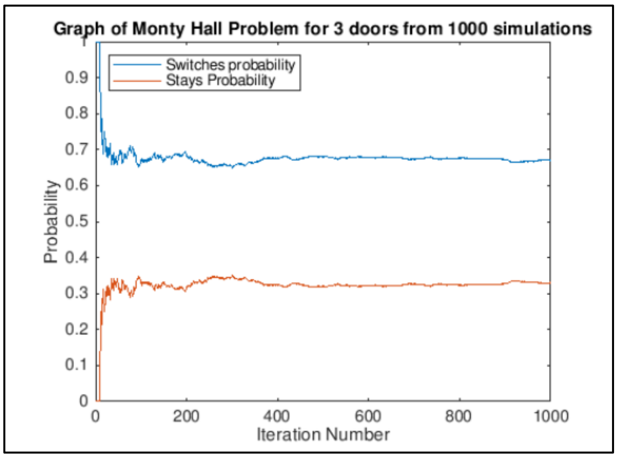

Рис. 3 Вероятности выигрыша, оранжевое – при отсутствии смены, синее – при изменении выбора

ПАРАДОКС ДНЕЙ РОЖДЕНИЙ. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ПАРАДОКСА

Какой размер случайной группы необходим, чтобы вероятность совпадения дней рождений у как минимум двух её участников достигла отметки в 50 процентов? Возьмем, к примеру, школьный класс. Если в нём учится 30 ребят, а в году 365 дней, то, казалось бы, вероятность повторения дат рождения крайне мала. Однако это наглядно иллюстрирует эффект, известный как парадокс дней рождений.

Суть парадокса дней рождений заключается в том, что в группе из 23 и более человек вероятность того, что у хотя бы двух из них совпадают даты рождения, превышает 50 %. Подставляя разные значения n, можно увидеть, что вероятность того, что в группе такого размера как минимум двое разделяют день рождения, заметно возрастает и достигает определенности при 366 или более людях в помещении. Но, несмотря на это, высокие вероятности возникают уже при относительно небольшом количестве участников. Например, в группе из 57 человек вероятность приближается к 99 % – это практически гарантированный шанс того, что хотя бы два человека родились в один и тот же день.

Впервые этот вопрос был сформулирован Рихардом Мизесом ещё в 1939 г. Несмотря на то, что это явление не является парадоксом в строгом смысле слова, оно так часто называется из-за неожиданно высокой вероятности его возникновения. Задача о днях рождений получила такое название, потому что количество людей, необходимое для высокой вероятности совпадения дат рождения, кажется удивительно небольшим. Многие ошибочно полагают, что это число должно быть 183, поскольку оно превышает половину дней в году, но это связано с распространенным заблуждением, что задача учитывает количество людей, у которых день рождения совпадает с днем рождения наблюдателя, а не просто любую пару общих дат рождения в группе. Важно помнить, что у остальных участников может быть общий день рождения.

Полностью исключить вероятность совпадения можно лишь при условии, что в группе будет не менее 367 человек, что обусловлено принципом Дирихле. Интуитивно кажется, что если рассматривать вероятность совпадения дат рождения двух человек, то независимо от конкретного дня в году вероятность будет равна ($\frac{1}{365}$ = 0,27 %), далее если умножить на число человек в группе (23), мы получим полную вероятность совпадения, что дает лишь $\frac{1}{365} \times 23 = 6.3$ %.

Предложенный вариант неприемлем, так как число потенциальных сочетаний намного больше, чем число участников группы:

$$\frac{23 \times 22}{2} = 253.$$

В математических расчетах используется модель, предполагающая случайное распределение дней в году, независимость событий и отсутствие внешних факторов, влияющих на рождаемость. Первоначально вычисляется $\bar{p}(n)$ – вероятность того, что в группе из n человек все дни рождения будут различными. Если число людей, *n*, превышает 365, то вероятность $p(n)$ совпадения дней рождений становится равной нулю согласно принципу Дирихле. В противном случае, когда *n* не превышает 365, расчет выполняется по другой формуле.

Выберем случайным образом дату рождения первого человека и зафиксируем ее. Затем аналогично выберем дату рождения второго, вероятность того, что она не совпадает с первой, равна $1 - \frac{1}{365}$. Продолжая этот процесс для каждого последующего человека, мы получим, что вероятность отличия дня рождения последнего участника от всех предыдущих также составляет $1 - \frac{n-1}{365}$.

Перемножив все вероятности, мы определим вероятность того, что дни рождений у всех окажутся разными

$$\bar{p}(n) = 1 \times \left(1 - \frac{1}{365}\right) \times \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \times \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) = \frac{365!}{365^n \times (365-n)!}$$

Вероятность совпадения равна:

$$p(n) = 1 - \bar{p}(n).$$

Представим в виде таблицы взаимосвязь между количеством людей в группе *n* (количество человек в группе) и вероятностью совпадения дат рождений (табл. 2).

С точки зрения психологии, мозг применяет два подхода к решению задач и принятию решений: первый – интуитивный, позволяющий быстро реагировать, а второй – требующий размышлений и анализа. Парадокс дней рождений задействует именно второй подход, требующий расчетов для получения верного ответа.

Таблица 2

Зависимость значений количества человек в группе и вероятности совпадения дней рождений

n	*p(n)*
10	12%
20	41%
30	70%
50	97%
100	99.99996 %
200	99.9999999999999999999999999998 %
300	$(1 - 7{\times}10^{-73}) \times 100$ %
350	$(1 - 3{\times}10^{-131}) \times 100$ %
367	100%

Задача о днях рождений – это лишь упрощенная модель реальных ситуаций. Неравномерность распределения дат рождений усложняет точный расчет, поскольку одни дни в году более популярны для рождений, чем другие. Например, в Соединенных Штатах наблюдается тенденция к рождению большего количества детей в летние месяцы. Хотя эта асимметрия и увеличивает вероятность общих дней рождений в группе, учет високосных лет несколько снижает эту вероятность. Тем не менее исследования показывают, что влияние этих факторов незначительно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копотева А. В. Случайное поведение участника как способ максимизации вероятности его выигрыша в парадоксе Монти Холла // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2019. №3. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/sluchaynoe-povedenie-uchastnika-kak-sposob-maksimizatsii-veroyatnosti-ego-vyigrysha-v-paradokse-monti-holla (дата обращения: 07.05.2025)
2. Егорычев И. Э. Интуиция и вероятность // Вестник ВятГУ. 2012. №4. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/intuitsiya-i-veroyatnost (дата обращения: 07.05.2025)
3. Пчелинцева Н. В., Самохин К. О., Картечина О. С. Парадокс дней рождения в криптографии // Наука и образование. 2022. №2. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/paradoks-dney-rozhdeniya-v-kriptografii (дата обращения: 07.05.2025)
4. Раенко Е. А., Санукова А. М. Парадоксы теории вероятностей // Информация и образование: границы коммуникаций INFO. 2018. №10 (18). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/paradoksy-teorii-veroyatnostey (дата обращения: 07.05.2025)

ОБ АВТОРАХ

БАШАРОВА Айгуль Равилевна, студент МО ИИМРТ УУНиТ.

METADATA

Title: Mathematical paradoxes of probability theory

Authors: A. R. Basharova [1]

Affiliation:

[1] Ufa University of Science and Technology (UUST), Russia.

Email: [1]aigulbasharova337@gmail.com

Language: Russian.

Source: Molodezhnyj Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa University of Science and Technology), no. 3 (34), pp. 121-125, 2025. ISSN 2225-9309 (Print).

Abstract: This article examines mathematical paradoxes in probability theory (the Monty Hall paradox and the birthday problem) that arise when intuitive expectations and rigorous calculations do not coincide. Mathematical modeling and computer simulations are used to demonstrate this, including simulating 10,000 trials using Python. The article's findings help rethink the role of random coincidences.

Key words: probability theory, Monty Hall paradox, birthday problem

About authors:

Basharova Aigul Ravilevna, student MO IIMRT UUST.