ISSN 2225-9309 (Print)
2026. № 1 (35). С. 9–12
Молодежный
Вестник УГАТУ
http://journal.uust.ru

УДК 519.6
doi 10.54708/22259309_2026_1359

Иррациональные множества и числа Пизо

А. Д. Бадмаев[1], **Н. М. Шерыхалина**[2], **Л. Я. Узбекова**[3]

[1] BadmaevAD@uust.ru, [2] n_sher@mail.ru, [3] Uzbekova.lya@ugatu.su

[1-3] ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (УУНиТ)

Аннотация: В статье рассматриваются понятия иррациональных множеств, их свойства, а также особый класс иррациональных чисел — числа Пизо. Представлены определения, примеры и их связь с теорией чисел и представлениями чисел в нестандартных системах счисления.

Ключевые слова: иррациональные числа; множества; числа Пизо; теорема Пизо; системы счисления; алгебраические числа; аппроксимация.

В математике иррациональные числа занимают особое место, выходя за рамки привычных рациональных дробей. Классическая теория чисел занимается не только арифметическими свойствами чисел, но и их представлением, топологией и алгебраической природой. Одним из интереснейших объектов исследования в этой области являются иррациональные множества и числа Пизо, обладающие уникальными математическими свойствами.

Иррациональными числами называют такие вещественные числа, которые не могут быть представлены в виде отношения двух целых чисел. Классическими примерами служат $\sqrt{2}, \pi, e$. Несмотря на то, что множество рациональных чисел счётно, множество иррациональных чисел – несчётно и обладает большей *плотностью* на числовой прямой.

Иррациональные множества – это такие подмножества вещественной прямой, все элементы которых являются иррациональными. Примерами таких множеств являются множество всех чисел вида $\sqrt{n}$, где $n \notin \mathbb{Q}$; подмножества Кантора; множества, определённые через алгебраические или трансцендентные условия.

Интерес исследователей к этим множествам связан с их сложной топологической и метрической структурой, а также с применением в динамических системах и фрактальной геометрии.

Числа Пизо – это действительные алгебраические числа $\beta > 1$, такие, что все сопряжённые к ним алгебраические корни по модулю строго меньше единицы. Впервые были подробно изучены французским математиком Шарлем Пизо в 1920-х годах.

Формально, число β – число Пизо, если оно является корнем минимального неприводимого целого полинома степени n, причём все остальные корни $\beta_2 \dots \beta_n$ удовлетворяют $|\beta_i| < 1$.

Простейший пример числа Пизо – корень уравнения $x^3 - x - 1 = 0$, приближённо равный $\beta \approx 1{,}3247$. Эти числа всегда иррациональны, так как алгебраическая степень выше единицы. Они используются для построения нестандартных позиционных систем счисления (так называемые β-разложения) и обладают свойством наименьшего роста целочисленных последовательностей при разложении вещественных чисел.

Одной из интересных особенностей чисел Пизо является возможность их использования в системах счисления, где основание β – нецелое число. В таком случае любое неотрицательное действительное число может быть представлено в виде:

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_{\mathrm{i}}\, \beta^{\mathrm{i}},$$

где $d_{\mathrm{i}} \in \mathbb{Z}$.

Если β – число Пизо, то такое представление имеет конечный или периодический вид для всех положительных рациональных чисел. Это свойство делает числа Пизо особенно интересными для теории автоматов и формальных языков. Числа Пизо и связанные с ними иррациональные множества находят применение в следующих областях: теория аппроксимаций, динамические системы, информатика, кодирование и сжатие данных. Также они появляются в изучении самоподобных фракталов и рациональных евклидовых пространств.

Исследования канадского математика D. W. Boyd существенно расширили понимание свойств чисел Пизо. В частности, он ввёл понятие регулярных чисел Пизо, а также изучал бесконечные семейства полиномов, корни которых обладают интересными спектральными свойствами. Эти исследования важны как с теоретической точки зрения, так и для построения эффективных алгоритмов в численных методах.

Регулярными числами Пизо называются такие числа Пизо, которые являются наименьшими по модулю среди всех корней их минимального целого уравнения. Это означает, что модуль $|\beta|$ больше модуля любого другого корня этого многочлена. Такие числа особенно важны при построении β-систем счисления, так как они обеспечивают устойчивость и компактность представлений.

В своей работе D.W. Boyd исследовал семейства полиномов, чьи действительные корни являются числами Пизо. Он ввёл два особых класса:

- α-семейство: полиномы вида

$$Q_{\alpha}(x) = x^{d} - x^{d-1} - x^{d-2} - \cdots - x - 1,$$

которые имеют единственный действительный корень α▯ > 1, являющийся числом Пизо. Этот корень экспоненциально приближается к 2 при увеличении n.

- β-семейство: полиномы вида

$$Q_{\beta}(x) = x^{d} - x - 1,$$

у которых также существует единственный положительный корень β▯, принадлежащий множеству чисел Пизо. Например, при $n = 3$, мы получаем уже известное уравнение $x^3 - x - 1 = 0$.

Эти семейства интересны тем, что их корни представляют собой множество точек сгущения на единичном интервале. Каждая такая точка содержит области точек, стремящихся к точкам сгущения, и все эти точки являются регулярными числами Пизо. Они также обладают хорошими свойствами с точки зрения аппроксимации вещественных чисел.

Иррациональные множества и числа Пизо представляют собой богатую и глубокую область современной математики, соединяющую элементы алгебры, анализа и теории информации. Их исследование не только углубляет понимание структуры вещественной прямой, но и открывает путь к практическим приложениям в математическом моделировании и вычислительных алгоритмах.

Для того чтобы описать полный класс всех чисел Пизо на интервале (1; 2), необходимо немного преобразовать найденный D.W. Boyd полином сгущения и добавить сходящийся линейный итератор для приближения к точкам сгущения слева и справа.

Введем общий вид полинома и назовем его $Pz(x) = 0$.

$$Pz\,(x) = x^n \cdot Q\,(x,d) \pm A\,(x)$$

данный полином будет обладать нужными нам свойствами, где $Q\,(x,d)$ –точка сгущения, а полином $A(x)$ будет полиномом приближения к точке сгущения. Оператор $\pm$ даст нам возможность приближаться к точкам с обоих концов интервала.

Полином	$x^n(x^2-x-1)+1$	Полином	$x^n(x^2-x-1)-1$
n	Числовое значение	n	Числовое значение
1	1.000000005258549 ...	1	1.839286755214161 ...
2	1.324717957244746 ...	2	1.754877666246693 ...
3	1.465571231876768 ...	3	1.704902776041646 ...
4	1.534157744914267 ...	4	1.673648546299842 ...
5	1.570147312196054 ...	5	1.653634586774049 ...
8	1.607982727928201 ...	8	1.627100547891776 ...
10	1.614306823257148 ...	10	1.621585612215567 ...
15	1.617705069957557 ...	15	1.618360818209372 ...
30	1.618033748375739 ...	30	1.618034229121857 ...
60	1.618033988749766 ...	60	1.618033988750024 ...
100	1.618033988749895 ...	100	1.618033988749895 ...

В основном в работах D.W. Boyd рассмотрены почти все полиномы сгущения. Следовательно, не сложно, изменяя и подбирая полином приближения $A(x)$, получать все новые точки, стремящиеся к точкам сгущения чисел Пизо.

Для примера полиномы $A\,(x)$ могут иметь такой вид:

$$A_1\,(x) = (x-1) \cdot (x^m \pm 1)$$

Все найденные числа Пизо и полиномы Пизо легко применяются в задачах систем счисления, а именно – кодирования любого целого числа в бинарную последовательность, в основании которого будет иррациональное число. Данное кодирование будет конечным и иметь плавающую точку, отделяющую целую часть от приближения к исходному числу. В предыдущих статьях подробнее рассмотрен превлиятельный алгоритм кодирования и раскодирования любых целых чисел в систему счисления Пизо. Особенным фактором можно считать разнообразие способов закодировать в бинарную последовательность целые числа. Это может быть необходимо в самых разных прикладных задачах инженерии и системах с пониженной помехоустойчивостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Allouch, J.-P., & Shallit, J. Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations. – Cambridge University Press, 2003.

2. Frougny, C. Representations of numbers and finite automata // Mathematical Systems Theory. – 1992.– 25. – 37–60.

3. Pisot, C. La répartition modulo 1 et les nombres algébriques // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. – 1938. – 7. – 205–248.

4. Березин, И. С., Кац, Н. П. Основы математики для студентов технических вузов. – М.: Наука, 2004.

5. Хинчин, А. Я. Цепные дроби. – М.: Наука, 1995.

6. Badmaev, A .D., Sherykhalina, N. M., Shaymardanova, E. R. Number systems represented by quadratic polynomials // Systems Engineering and Information Technologies. – 2024. – Т. 6. – № 2 (17). – С. 33–38.

7. Бадмаев, А. Д., Шерыхалина, Н. М., Узбекова, Л. Я. Аналитический алгоритм разложения натуральных чисел в Пиеричную систему счисления // Молодежный вестник УГАТУ. – 2024. – № 2 (31). – С. 5–9.

8. Бадмаев, А. Д., Шерыхалина, Н. М., Шаймарданова, Е. Р. Использование конечной иррациональной системы счисления для передачи бинарного сигнала // Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений (памяти проф. Н.И. Юсуповой) ITIDS'2024. Труды X Международной научной конференции. В 2-х томах. – Уфа, 2024. – Т. 1. – С. 113–117.

ОБ АВТОРАХ

БАДМАЕВ Алексей Дмитриевич, асп. каф. ВМиК. Дипл. математик (ВОЛГУ, 2022). Готовит дис. по теме: Математическое моделирование процессов передачи бинарных данных с использованием иррациональных систем счисления.

ШЕРЫХАЛИНА Наталия Михайловна, проф. каф. ВМиК. Дипл. инж.-системотехн. (УГАТУ, 1993). Д-р техн. наук по мат. моделированию, числ. методам и комплексам программ (УГАТУ, 2012).

УЗБЕКОВА Лилия Явгаровна, ст. преп. каф. ВМиК. Дипл. Инженер (УГАТУ, 1998), Экономист-математик (УГАТУ, 2000).

METADATA

Title: The Irrational sets and pisot numbers.

Authors: A. D. Badmaev [1], N. M. Sherykhalina[2], L. Y. Uzbekova[3]

Affiliation:

[1,2,3] Ufa University of Science and Technology (UUST).

Email: [1] BadmaevAD@uust.ru, [2] n_sher@mail.ru, [3] Uzbekova.lya@ugatu.su.

Language: Russian.

Source: Molodezhnyj Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa University of Science and Technology), no. 1 (35), pp. 9-12, 2026. ISSN 2225-9309 (Print).

Abstract: The article examines the concepts of irrational sets, their properties, and a special class of irrational numbers — Pisot numbers. Definitions, examples, and their connection to number theory, as well as number representations in non-standard numeral systems, are presented.

Key words: irrational numbers, sets, Pisot numbers, Pisot's theorem, number systems, algebraic numbers, approximation.

About authors:

BADMAEV Aleksei Dmitrievich, PhD student Dept. of VMK. Dipl. mathematician (Volgograd State University, 2022).

SHERYKHALINA Nataliya Mikhailovna, Prof., Dept. of VMK. Dipl. system engineer (UGATU, 1993). Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2012).

UZBEKOVA,Liliya Javgarovna, Dept. of VMK. Dipl. engineer (UGATU, 1998). Dipl. economist mathematician (UGATU, 2000).