ISSN 2225-9309 (Print)
2026. № 1 (35). С. 46–50
Молодежный
Вестник УГАТУ
http://journal.uust.ru

УДК 519.178 doi 10.54708/22259309_2026_13546

Графы в пространстве: геометрия и дискретная структура

А. А. Лёшкина[1]

[1] alenaleshkina2006@gmail.com

[1]ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (УУНиТ)

Аннотация. В данной статье рассматривается связь понятий дискретной математики и аналитической геометрии на примере графов. Особое внимание уделено геометрической интерпретации графов. Обсуждаются примеры применения графов в различных областях, например, в химии. Статья может быть полезна студентам технических направлений, изучающим основы графов.

Ключевые слова: графы; дискретная математика; трехмерное пространство; аналитическая геометрия; линейная алгебра; применение графов.

ВВЕДЕНИЕ

Графы часто используются в повседневной жизни: с их помощью можно строить маршруты и организовывать данные, а также использовать их в компьютерных и социальных сетях. Интересно, как графы соединяют в себе дискретную математику и аналитическую геометрию. Благодаря тому что с их помощью можно описать как абстрактные структуры (например, алгоритмические задачи), так и физические системы (например, молекулярные связи), они находят применение в самых разных областях науки.

В дискретной математике графы часто исследуются как абстрактные системы без учета их расположения в пространстве. Однако на практике у вершин графов часто есть координаты, а рёбра обладают длиной и направлением. Совмещение подходов аналитической геометрии, линейной алгебры и дискретной математики открывает возможность для более глубокого анализа графов.

Актуальность данной статьи обусловлена широким применением графов в навигационных системах, компьютерной графике и прочих инженерных задачах, где важно учитывать не только саму структуру связей, но и их геометрические свойства.

Цель работы – показать, как можно использовать методы аналитической геометрии и линейной алгебры для анализа графов в пространстве. Для этого будут рассматриваться понятия расстояния между вершинами, векторного представления ребер и матриц смежности, связывающих граф с его геометрией.

С целью более точного изложения материала вначале определим ключевые понятия, которые будут использоваться в данной статье, а также обозначим связь между элементами графа и их геометрической интерпретацией.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Граф – математическая модель, состоящая из двух множеств: множества вершин (узлов) и множества ребер, соединяющих пары вершин. Обозначается как $G = (V, X)$, где V – множество, элементы которого называются вершинами, X – множество неупорядоченных пар вершин, называемых ребрами. Графы бывают двух основных видов: неориентированные, в которых ребро не имеет направления, и ориентированные, в которых важен порядок (например, направление (A, B) отличается от (B, A)).

В дискретной математике графы в основном представляются в виде схем. Однако для решения задач, где важно расположение вершин графа, а также в контексте пространственного графа каждая вершина может быть представлена как точка в декартовой системе координат. Таким образом, координаты – это числовое представление положения вершины в пространстве. Это помогает визуализировать граф в пространстве и применять к нему методы аналитической геометрии для анализа.

Соответственно если вершины графа имеют координаты, то ребро между ними можно представить в виде вектора. Длину этого вектора, то есть длину ребра между вершинами A и B, можно рассчитать по следующей формуле:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГРАФОВ

Также графы можно описывать с помощью матриц. Матрица смежности – это таблица, в которой строки и столбцы соответствуют вершинам графа. Если между вершинами i и j есть ребро, то элемент aij=1, иначе 0. То есть матрица показывает, какие вершины графа соединены. Также для графов можно ввести матрицу расстояний, где dij – длина ребра между вершинами, dij=|(A_i A_j) ⃗ |. Такая матрица помогает анализировать расстояния в графе и строить маршруты с помощью методов линейной алгебры.

Рассмотрим упрощенный пример. Небольшой неориентированный граф, состоящий из 4 вершин: A (0,0), B (2,0), C (2,3), D (0,3) (рис. 1).

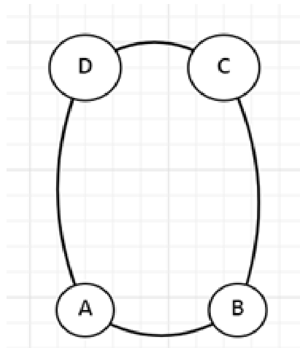

Рис. 1. Неориентированный граф

Составим для него матрицу смежности (рис. 2):

	A	B	C	D
A	0	1	0	1
B	1	0	1	0
C	0	1	0	1
D	1	0	1	0

Рис. 2. Матрица смежности графа

Эта матрица позволяет легко определить наличие ребер. Координаты позволяют нам рассчитать длины ребер и составить матрицу расстояний (рис. 3), которая даст нам представление о геометрических свойствах данного графа:

	A	B	C	D
A	0	2	0	3
B	2	0	3	0
C	0	3	0	2
D	3	0	2	0

Рис. 3. Матрица расстояний

Нетрудно заметить, что в отличие от матрицы смежности, которая фиксирует только наличие связей между вершинами, матрица расстояний позволяет анализировать протяженность путей. Также она помогает находить кратчайшие маршруты и применять численные методы линейной алгебры. Этот пример демонстрирует, что граф обладает планарной структурой (то есть его можно уложить на плоскости так, чтобы ребра не перекрывались). Это свойство важно в задачах, где требуется однозначное представление связей – в транспортных схемах, схемах электрических цепей и т. д.

ПЕРЕХОД К ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ГРАФАМ

Однако не все задачи решаются на плоскости, для решения некоторых из них необходимо перейти от плоской модели к пространственной. Когда мы переходим к трехмерному изображению, мы получаем возможность размещать вершины не только по координатам x и y, но и по координате z, которая позволяет нам задать высоту. Это значит, что ребра теперь могут проходить друг над другом без пересечений.

Также это дает возможность задать каждое ребро с помощью параметрических уравнений, как в аналитической геометрии. Пусть даны две вершины графа: A (x_1, y_1, z_1) и B (x_2, y_2, z_2). Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет следующие координаты: $\overrightarrow{AB}$ = (x_2 –x_1, y_2 –y_1, z_2 –z_1). Прямая, соединяющая вершины A и B, может быть задана параметрически:

$$\begin{cases} x(t) = x_+ + (x_2 - x_1)t \\ y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t, \text{где } t \in [0,1] \\ z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$$

Такое представление позволяет учитывать не только наличие ребер, но и их реальное геометрическое положение, что делает модель более точной и применимой в практических задачах. Это особенно актуально для областей, где возникает необходимость решать подобные задачи, связанные с пространственным расположением объектов. Примерами таких сфер становятся:

- Молекулярная химия. Представление молекул в виде графов, где атомы становятся вершинами, а химические связи – ребрами, позволяет количественно оценивать расстояния между атомами и углы между связями. Этот метод дает возможность точно предсказывать поведение молекул в реакциях, а также значительно упрощает анализ сложных органических соединений. Создание трехмерных баз веществ ускоряет прогресс в развитии фармацевтики, материаловедения и синтетической биологии.
- Нейробиология. Использование пространственных графов улучшает понимание структуры и функционирования нейронных связей. Учет реального расположения клеток и связей между ними дает возможность эффективно исследовать передачу нервных импульсов, определять ключевые области активности в мозге и связанные с ними когнитивные процессы, а также разрабатывать новые подходы к изучению и лечению таких заболеваний, как эпилепсия и болезнь Альцгеймера.
- Астрономия: пространственные графы применяются для описания взаимного расположения небесных тел. Вершинами становятся звезды, планеты и целые галактики, а

ребрами – гравитационные взаимодействия и орбитальные траектории. Такое применение пространственных графов позволяет моделировать динамику звездных систем, анализировать устойчивость планетарных орбит и исследовать крупномасштабную структуру Вселенной.

Можно сделать вывод, что геометрическое представление графов значительно расширяет возможности их применения в самых разных научных исследованиях, особенно в тех, где расположение объектов имеет критическое значение.

ОБЪЕДИНЕНИЕ ПОДХОДОВ

Когда мы рассматриваем граф, в котором ребра образуют замкнутые пути – циклы, можно заметить, что циклы можно записывать в виде строк из нулей и единиц – как векторы. Такой способ описания позволяет находить независимые циклы, строить базис (минимальный набор, из которого можно составить все остальные циклы), а также использовать другие методы линейной алгебры (например, систему уравнений) для анализа структуры графа. Рассматриваемый подход находит свое применение в электротехнике при анализе электрических цепей. Замкнутые контуры цепи представляют в качестве циклов графа. Нахождение базиса циклов позволяет составить систему линейных уравнений, с помощью которых можно описать электрические характеристики цепи, такие как токи, напряжение и сопротивление.

При анализе графов с координатным представлением необходимо использовать знания из разных областей. Дискретная математика позволяет задать структуру графа, аналитическая геометрия помогает определить положение этого графа в пространстве, а линейная алгебра позволяет анализировать граф с помощью матричного представления.

Данный подход позволяет представить граф в виде полноценной математической модели, используя координаты и векторы для описания его пространственных свойств, а матрицы – для представления его структуры. Также такая комбинация различных математических аппаратов значительно расширяет возможности графов, превращая их в универсальный инструмент для решения физических, технических, биологических и многих других задач в самых разных областях. В результате графы превращаются в универсальный инструмент, позволяющий учитывать не только связи между объектами, но и их реальное расположение в пространстве.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная статья демонстрирует взаимосвязь дискретной математики, аналитической геометрии и линейной алгебры на примере исследования пространственных графов. В работе показано, как координатное представление графов структур объединяет эти разделы математики, позволяя применять комбинированные методы для анализа. Такой подход позволяет расширить анализ графов и делает их применимыми в самых разных областях – от навигации до химии и нейробиологии. Стоит отметить, что использование методов аналитической геометрии и линейной алгебры способствует более глубокому пониманию структуры и свойств графов, что открывает новые возможности для их визуализации. Можно сделать вывод, что объединение этих разделов математики позволяет взглянуть на графы не только как на набор связей, но и как на универсальную модель для описания связей в пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванов, Б. Н.** Дискретная математика и теория графов: Учебное пособие для вузов / Б. Н. Иванов. – М.: Изд-во Юрайт, 2024. – 177 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-14470-3.
2. **Гостин, А. М.** Дискретная математика. Теория графов: Учебное пособие / А. М. Гостин, В. П. Корячко. – Рязань: РГРТУ, 2006. – 80 с. – ISBN 5-7722-0252-9.
3. **Сотников, В. В., Селезнёв, А. Ю., & Петрова, Е. В.** Применение теории графов в различных разделах химии // *Актуальные проблемы науки и образования*. – 2017. – № 5. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-teorii-grafov-v-razlichnyh-razdelah-himii

4. **Волкова, М. А., & Ключников, А. В.** Применение теории графов в алгебраических многосеточных методах для решения разреженных СЛАУ // *Научный рецензируемый журнал НИУ ВШЭ*. – 2022. – 16 с.
5. **Гончарова, И. С.** Преобразования метрик, сохраняющих геометрические характеристики конечных метрических пространств // *Известия вузов. Математика*. – 2021. – Т. 65. – № 4. – С. 52-59.

ОБ АВТОРАХ

ЛЁШКИНА Алёна Алексеевна, студентка МО ИИМРТ УУНиТ

METADATA

Title: Spatial Graphs

Author: A. A. Leshkina

Affiliation:

[1] Ufa University of Science and Technology (UUST), Russia.

Email: [1] alenaleshkina2006@gmail.com

Language: Russian.

Source: Molodezhnyj Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa University of Science and Technology), no. 1 (35), pp. 46-50, 2026. ISSN 2225-9309 (Print).

Abstract: This article explores the connection between concepts of discrete mathematics and analytic geometry using graphs as an example. Special attention is given to the geometric interpretation of graphs. The paper discusses examples of graph applications in various fields, such as chemistry. This article may be useful for engineering students studying the fundamentals of graph theory.

Keywords: graphs, discrete mathematics, three-dimensional space, analytic geometry, linear algebra, graph applications

About authors:

LESHKINA Alyona Alekseivna, student MO IIMRT UUST