

УДК 511.33

doi 10.54708/22259309_2026_13556

ЧИСЛА САЛЕМА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Д. Р. МИРХАЙДАРОВА¹, Н. С. САВЕЛЬЕВ²

¹lamyrr@bk.ru, ²marissddddd@gmail.com

¹⁻²ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (УУНИТ)

Аннотация. Числа Салема, являющиеся корнями многочленов с целыми коэффициентами, обладают уникальными алгебраическими и геометрическими свойствами. Статья рассматривает их характеристики, классификацию и методы нахождения, включая формулы Виета, метод Ньютона и комбинаторные подходы. Особое внимание уделяется их применению в теории кодирования, криптографии, оптимизации алгоритмов и физических системах, подчеркивая их роль в повышении надежности и эффективности систем.

Ключевые слова: числа Салема; множества; числа Пизо; динамические системы; системы счисления; комбинированный метод; метод Ньютона; метод Хорд; бисекция.

ВВЕДЕНИЕ

Эти числа обладают двумя важными группами свойств – алгебраическими и геометрическими. Давайте разберём алгебраические:

1. **Симметрия корней.** Если число Салема является корнем уравнения, то его «зеркальный двойник» (комплексно-сопряжённое число) тоже будет корнем. Это как если бы у каждого числа был обязательный партнёр.

2. **Сохраняемость при операциях.** Когда мы складываем или умножаем два числа Салема, результат тоже будет числом Салема. Это похоже на закрытый клуб, где операции не выводят за его пределы.

3. **Устойчивость.** Системы, построенные на таких числах, меньше «расстраиваются» от небольших изменений. Это особенно ценно в вычислениях, где важно избегать накопления ошибок.

А про геометрические свойства можно сказать, что если посмотреть на числа Салема в комплексной плоскости, то все их сопряжённые значения будут лежать внутри или на границе единичного круга.

Кроме того, числа Салема могут образовывать циклы при итеративных процессах, что важно для изучения устойчивости как односвязных, так и многосвязных систем.

Эти числа классифицируются по типам симметричных Полиномов, то есть у них все корни автоматически являются числами Салема, и по типам нормированных Полиномов, а они, в свою очередь, упрощают анализ, так как их коэффициенты подчиняются строгим правилам. Числа Салема подразделяются по степени их определяющих многочленов. Наиболее простыми являются квадратичные случаи – многочлены второй степени, чьи сопряжённые корни расположены в пределах единичной окружности. Для многочленов более высоких степеней характерно наличие как вещественных корней (расположенных внутри или на границе единичного круга), так и пар комплексно-сопряжённых корней. Они находятся благодаря разным методам. О них мы узнаем ниже.

Алгебраические методы:

1) Формула Виета: Эта формула связывает коэффициенты многочлена с его корнями. Например, для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ сумма корней равна $-\frac{b}{a}$, а произведение $-\frac{c}{a}$.

2) Разложение на множители: Если можно разложить многочлен на линейные множители, это упростит нахождение его корней. Например, если мы можем представить многочлен в виде произведения линейных факторов, это сразу дает нам все корни.

Численные методы:

1) Метод Ньютона: Этот итеративный метод позволяет находить корни уравнений с высокой точностью. Он основан на использовании производной функции для улучшения приближений корней.

2) Метод бисекции: Этот метод заключается в делении интервала пополам до тех пор, пока не будет найдено приближение корня. Он особенно полезен, когда известно, что корень находится в определенном интервале.

Комбинаторные методы:

1) Графические методы: Визуализация распределения корней на комплексной плоскости может помочь в нахождении новых чисел Салема. Построение графиков функций может дать интуитивное понимание о расположении корней и их взаимодействии.

2) Рекуррентные соотношения: Можно использовать рекуррентные формулы для генерации последовательностей чисел Салема. Например, можно создать последовательность многочленов с известными свойствами и анализировать их корни для поиска новых чисел.

А теперь узнаем, где эти числа находят применение. Оказывается, их используют в самых разных областях науки и техники! Например:

1) Теория кодирования: Числа Салема могут использоваться для создания кодов с минимальной вероятностью ошибок при передаче данных. Например, в системах с коррекцией ошибок важно минимизировать расстояние между кодовыми словами, чтобы уменьшить вероятность ошибок при передаче информации.

2) Криптография: В криптографии используются сложные алгебраические структуры для создания шифров. Числа Салема могут быть применены для построения безопасных криптографических систем благодаря своим устойчивым свойствам и способности обеспечивать надежность шифрования данных.

3) Анализ алгоритмов: В компьютерных науках числа Салема могут помочь в оптимизации алгоритмов. Их использование может привести к более эффективным методам обработки данных и улучшению производительности вычислительных процессов. Например, знание о свойствах чисел Салема может помочь разработать алгоритмы с меньшей сложностью.

4) Физика и инженерия: В физике числа Салема могут применяться для моделирования колебательных систем или волн. Например, в механике или электротехнике они могут использоваться для анализа устойчивости систем и их динамики. Понимание чисел Салема может помочь инженерам создавать более стабильные системы.

Комбинированный метод – это стратегия, объединяющая преимущества нескольких численных методов для решения уравнения $f(x) = 0$. Чаще всего сочетают:

1. Гарантированно сходящийся метод (бисекция, метод хорд) для начального грубого приближения.

2. Быстро сходящийся метод (Ньютона, секущих) для точного вычисления корня.

Метод Ньютона – это один из самых эффективных итерационных методов решения нелинейных уравнений вида $f(x) = 0$. Он отличается квадратичной сходимостью (очень быстрой), но требует выполнения определённых условий.

Основная идея метода. Метод использует линейную аппроксимацию функции в текущей точке x_n :

1) Проводим касательную к графику $f(x)$, при $(x_n, f(x_n))$.

2) Находим точку пересечения касательной с осью x – это новое приближение $x_{(n+1)}$.

$$\text{Формула итерации: } x_{n+1} = \frac{x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Условия сходимости. Метод Ньютона не всегда сходится. Для гарантированной сходимости должны выполняться условия:

Функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $[a, b]$.

Производная $f'(x) \neq 0$ вблизи корня.

Начальное приближение x_0 достаточно близко к корню.

Вторая производная $f''(x)$ ограничена (чтобы избежать расходимости).

Если $f'(x)$ близка к нулю, метод может расходиться или осциллировать.

Таблица 1

Преимущества и недостатки	
Преимущества	Недостатки
Очень быстрая сходимость (квадратичная)	Требует вычисления производной
Точно работает для гладких функций	Может расходиться при плохом x_0
Эффективен для полиномов и аналитических функций	Не работает при $f'(x) = 0$

Метод хорд – это итерационный численный метод решения уравнений вида $f(x) = 0$. Он является модификацией метода секущих, но в отличие от него, фиксирует одну из границ интервала, что обеспечивает гарантированную сходимость при выполнении условий.

Основная идея метода. Метод использует линейную интерполяцию (хорду) между двумя точками на графике функции:

Выбирается интервал $[a, b]$ где $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки ($f(a) \cdot f(b) < 0$).

Проводится хорда (прямая линия) между точками $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Точка пересечения хорды с осью X даёт новое приближение корня c .

Интервал сужается: $[a, c]$ или $[c, b]$, в зависимости от знака $f(c)$.

Формула итерации:

$$x_{(n-1)} = a - \frac{(f(a) \cdot (b - a))}{(f(b) - f(a))}$$

Условия сходимости: Функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Интервал содержит ровно один корень ($f(a) \cdot f(b) < 0$).

Фиксированная граница должна удовлетворять: $f(x) \cdot f''(x) > 0$ (например, если $f'' > 0$, фиксируем точку, где $f < 0$).

Таблица 2

Преимущества и недостатки	
Преимущества	Недостатки
Гарантированная сходимость	Сходится медленнее, чем Ньютон
Не требует вычисления производной	Требует выбора «правильной» фиксированной точки
Устойчивее метода Ньютона	Медленнее бисекции при $f''(x) \approx 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Числа Салема – это особый класс чисел с удивительными свойствами. Они важны как для теории, так и для практических расчетов.

Есть полезный способ вычислений, который объединяет два метода:

1. Метод хорд (надежный, но медленный).
2. Метод Ньютона (быстрый, но менее устойчивый).

Такой комбинированный подход дает точность, скорость, надежность.

Это особенно ценно при решении сложных уравнений, где важны и быстрота, и безошибочность расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Boyd, Salem Numbers and Their Properties / D. Boyd // Journal of Number Theory. — 1977. — Vol. 9, Iss. 1. — P. 1–10.
2. Харди Г. Х. Введение в теорию чисел / Харди Г. Х., Райт Э. М.. — М.: Издательство иностранной литературы, 1960. — 516 с.
3. Boyd, D. W. Pisot and Salem Numbers in Intervals of the Real Line // The American Mathematical Monthly. — 1995. — Vol. 102, no. 10. — P. 884–891
4. Lehman, J. L., Algebraic Numbers and Diophantine Equations / . Lehman, J. L., Rayman, G. — Boca Raton: CRC Press, 2015. — 212 p.
5. Schlowotzki M., Williams R. K. Vieta's Formulas and Root Finding // Mathematics Magazine. — 1993. — Vol. 66, No. 5. — P. 310–312.
6. Martin, K. Polynomial Roots and Factorization / K. Martin, R. Brown. — London : Springer, 2021. — 256 p.
7. Чапра, С. К. Численные методы для инженеров / С. К. Чапра, Р. П. Канале. — М. : Физматлит, 2017. — 1080 с.
8. MacWilliams, F. J. The Theory of Error-Correcting Codes / F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane. — Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1977. — 762 p.
9. Харди Г. Х., Райт Э. М. Введение в теорию чисел / Пер. с англ. С. Н. Меркурьева, С. В. Востокова. — М.: Изд-во «Наука», 1985. — 504 с.
10. Иванов, П. С. Применение алгебраических структур в криптографии / П. С. Иванов // Криптография и безопасность. — 2023. — Т. 5, № 2. — С. 45–58.
11. Badmaev A.D., Sherykhalina N.M., Shaymardanova E.R. Number systems represented by quadratic polynomials. — Systems Engineering and Information Technologies. 2024. Т. 6. № 2 (17). С. 33–38.
12. Бадмаев А.Д., Шерыхалина Н.М., Узбекова Л.Я. Аналитический алгоритм разложения натуральных чисел в Пиеричную систему счисления. — Молодежный вестник УГАТУ. 2024. № 2 (31). С. 5–9.
13. Бадмаев А.Д., Шерыхалина Н.М., Шаймарданова Е.Р. Использование конечной иррациональной системы счисления для передачи бинарного сигнала. — В сборнике: Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений (памяти проф. Н.И. Юсуповой) ITIDS'2024. Труды X Международной научной конференции. В 2-х томах. Уфа, 2024. С. 113–117.
14. Burden, R. L. Numerical Analysis / R. L. Burden, J. D. Faires, A. M. Burden. — 10th ed. — Boston : Cengage Learning, 2015. — 912 p.
15. Stoer, J. Introduction to Numerical Analysis / J. Stoer, R. Bulirsch. — 3rd ed. — New York : Springer-Verlag, 2002. — 744 p.
16. Sauer, T. Numerical Analysis / T. Sauer. — 3rd ed. — Pearson, 2018. — 664 p.

ОБ АВТОРАХ

МИРХАЙДАРОВА Диана Руслановна, студентка МО ИИМРТ УУНИТ;

САВЕЛЬЕВ Никита Сергеевич, студент МО ИИМРТ УУНИТ.

METADATA

Title: Salem Numbers and Their Applications.

Authors: D. R. Mirkhaydarova¹, N. S. Savelyev².

Affiliation:

^{1,2} Ufa University of Science and Technology (UUST), Russia.

Email: ¹lamyrr@bk.ru, ²marissddddd@gmail.com

Language: Russian.

Source: Molodezhnyj Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa University of Science and Technology), no. 1 (35), pp. 56–59, 2026. ISSN 2225-9309 (Print).

Abstract: Salem numbers, defined as roots of polynomials with integer coefficients, exhibit distinctive algebraic and geometric properties. This article explores their characteristics, classification, and applications in coding theory, cryptography, algorithm analysis, and physical systems. It also discusses methods for finding these numbers, including algebraic, numerical, and combinatorial approaches.

Key words: Salem numbers, Pisot numbers, algebraic polynomials, dynamical systems, numeral systems, Vieta's formulas, Newton's method, chord method, bisection.

About authors:

MIRKHAYDAROVA Diana Ruslanovna, student, Institute of Informatics, Mathematics and Robotics, UUST;

SAVELYEV Nikita Sergeevich, student, Institute of Informatics, Mathematics and Robotics, UUST;