УДК 517.9
DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2023.1.3

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

© Э. Р. Шайхиев[1], Р. Д. Муртазина[1], А. Д. Низамова[2], Н. А. Сидельникова[1]*, Г. К. Галина[1]

[1]*Уфимский университет науки и технологий*
Россия, Республика Башкортостан 450076, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

[2]*Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН*
Россия, Республика Башкортостан, 450054 г. Уфа, пр. Октября, 71.

Тел: +7 (347) 229 96 32.
**Email: zhiber.na@gmail.ru*

В работе получены законы сохранения нулевого, первого и второго порядков и проведен симметрийный анализ нелинейного уравнения Шредингера вида

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(uv)\cdot u, \\ v_t = -v_{xx} - f(uv)\cdot v. \end{cases}$$

Частные случаи данной системы уравнений были изучены в работах [1] и [2], в которых были получены условия, которым должна удовлетворять правая часть системы уравнений указанного вида, обладающая широким набором законов сохранения.

Ключевые слова: *нелинейное уравнение Шредингера, закон сохранения, преобразование, оператор полного дифференцирования, система дифференциальных уравнений.*

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$\begin{cases} iu_t = u_{xx} + f(|u|^2)\cdot u, \\ -i\bar{u}_t = \bar{u}_{xx} + f(|u|^2)\cdot \bar{u}, \end{cases} \tag{1}$$

где $|u|^2 = u\cdot\bar{u}$ и $f \neq 0$.

Заменой $\tau = -it$ систему *(1)* перепишем в виде

$$\begin{cases} u_\tau = u_{xx} + f(|u|^2)\cdot u, \\ -\bar{u}_\tau = \bar{u}_{xx} + f(|u|^2)\cdot \bar{u}. \end{cases} \tag{2}$$

Положим вместо переменной τ переменную t, а вместо $\bar{u}$ – переменную v. Теперь преобразуем систему *(2)* следующим образом

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(uv)\cdot u, \\ -v_t = v_{xx} + f(uv)\cdot v \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(uv)\cdot u, \\ v_t = -v_{xx} - f(uv)\cdot v. \end{cases} \tag{3}$$

1. Закон сохранения нулевого порядка

Сначала рассмотрим закон сохранения нулевого порядка (см. [1–2])

$$D_t A(u,v) = D_x B(u,v,u_x,v_x), \tag{4}$$

где D_t и D_x – операторы полного дифференцирования по t и x соответственно.

Соотношение *(4)* запишем в следующем виде

$$A_u u_t + A_v v_t = B_u u_x + B_v v_x + B_{u_x} u_{xx} + B_{v_x} v_{xx}$$

или, используя *(3)*,

$$A_u(u_{xx} + f(uv)\cdot u) + A_v(-v_{xx} - f(uv)\cdot v) = \\ = B_u u_x + B_v v_x + B_{u_x} u_{xx} + B_{v_x} v_{xx}.$$

При независимых переменных u_{xx} и v_{xx} приравняем коэффициенты, тогда

$$\begin{cases} A_u = B_{u_x}, \\ -A_v = B_{v_x}, \\ A_u f(uv)\cdot u - A_v f(uv)\cdot v = B_u u_x + B_v v_x. \end{cases} \tag{5}$$

Далее будем рассматривать три случая:

1. $A_v = 0, A_u \neq 0$;
2. $A_v \neq 0, A_u = 0$;
3. $A_v \cdot A_u \neq 0$.

Если $A_v = 0$, $A_u \neq 0$, то $B = B(u,v,u_x)$, $B = A_u u_x + \tilde{B}(u,v)$ и

$$A_u f(uv)\cdot u = B_u u_x + B_v v_x. \tag{6}$$

Так как в *(6)* первые два слагаемых не зависят от v_x, а первое и третье слагаемое не зависят от u_x, то

$$\begin{cases} A_u f(uv)\cdot u = 0, \\ B_v = 0, \\ B_u = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $A_u = 0$.

Если $A_v \neq 0$, $A_u = 0$, то $B = B(u, v, v_x)$,

$B = -A_v v_x + \tilde{\tilde{B}}(u,v)$ и

$$-A_v f(uv)\cdot v = B_u u_x + B_v v_x$$

или

$$-A_v f(uv)\cdot v = \tilde{\tilde{B}}_u u_x + \left(-A_{vv} v_x + \tilde{\tilde{B}}_v\right) v_x \tag{7}$$

Из *(7)* видно, что

$$\begin{cases} -A_v f(uv)\cdot v = 0, \\ \tilde{\tilde{B}}_u = 0, \\ -A_{vv} = 0, \\ \tilde{\tilde{B}}_v = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует $A_v = 0$. Второй случай невозможен.

Если $A_v \cdot A_u \neq 0$, то из первых двух соотношений системы *(5)* выразим

$$B = A_u u_x - A_v v_x + \hat{B}(u,v),$$

а третье уравнение *(5)* примет вид

$$A_u f(uv)\cdot u - A_v f(uv)\cdot v = \left(A_{uu} u_x - A_{uv} v_x + \hat{B}_u\right) u_x + \\ +\left(A_{uv} u_x - A_{vv} v_x + \hat{B}_v\right) v_x. \tag{8}$$

Уравнение *(8)* представляет собой полином относительно переменных u_x и v_x, поэтому справедлива система

$$\begin{cases} A_u f(uv)\cdot u - A_v f(uv)\cdot v = 0, \\ A_{uu} = 0, \\ -A_{vv} = 0, \\ \hat{B}_u = 0, \\ \hat{B}_v = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Значит, $\hat{B}$ – произвольная постоянная, $A = \alpha_1 uv + \alpha_2 u + \alpha_3 v + \alpha_4$ при $\alpha_i = const$. Подставим в первое соотношение *(9)*

$$(\alpha_1 v + \alpha_2) f(uv)\cdot u - (\alpha_1 u + \alpha_3) f(uv)\cdot v = 0$$

или

$$\alpha_1 uv + \alpha_2 u - \alpha_1 uv + \alpha_3 v = 0.$$

Отсюда следует, что $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

В итоге

$$A = \alpha_1 uv + \alpha_4,$$
$$B = \alpha_1 v\cdot u_x - \alpha_1 u\cdot v_x + const$$

и закон сохранения нулевого порядка *(4)* примет вид

$$D_t(uv) = D_x(v u_x - u v_x).$$

2. Закон сохранения первого порядка

В этом параграфе рассмотрим закон сохранения первого порядка

$$D_t A(u, v, u_x, v_x) = D_x B(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}) \tag{10}$$

для системы *(3)*.

Соотношение *(10)* запишем в виде

$$A_u u_t + A_v v_t + A_{u_x} u_{xt} + A_{v_x} v_{xt} = B_u u_x + B_v v_x + B_{u_x} u_{xx} + B_{v_x} v_{xx} + +B_{u_{xx}} u_{xxx} + B_{v_{xx}} v_{xxx}$$

или, используя выражения системы *(3)*, последнее представим так

$$A_u(u_{xx} + f(uv)\cdot u) + A_v(-v_{xx} - f(uv)\cdot v) + A_{u_x}(u_{xxx} + f'(uv)\cdot(u_x v + u v_x)\cdot u + f(uv)\cdot u_x) + \\ +A_{v_x}(-v_{xxx} - f'(uv)\cdot(u_x v + u v_x)\cdot v - f(uv)\cdot v_x) = B_u u_x + B_v v_x + B_{u_x} u_{xx} + B_{v_x} v_{xx} + B_{u_{xx}} u_{xxx} + B_{v_{xx}} v_{xxx}.$$

При независимых переменных u_{xxx} и v_{xxx} приравняем коэффициенты, тогда

$$\begin{cases} A_{u_x} = B_{u_{xx}}, \\ -A_{v_x} = B_{v_{xx}} \end{cases} \tag{11}$$

и

$$A_u(u_{xx} + f(uv)\cdot u) + A_v(-v_{xx} - f(uv)\cdot v) + A_{u_x}(f'(uv)\cdot(u_x v + u v_x)\cdot u + f(uv)\cdot u_x) + \\ +A_{v_x}(-f'(uv)\cdot(u_x v + u v_x)\cdot v - f(uv)\cdot v_x) = B_u u_x + B_v v_x + B_{u_x} u_{xx} + B_{v_x} v_{xx}. \tag{12}$$

Из *(11)* следует, что $B = A_{u_x} u_{xx} - A_{v_x} v_{xx} + P(u, v, u_x, v_x)$ и сумму в правой части равенства *(12)* перепишем следующим образом

$$\begin{gathered}B_u u_x + B_v v_x + B_{u_x} u_{xx} + B_{v_x} v_{xx} = \\ = \big(A_{u_x} u_{xx} - A_{v_x} v_{xx} + P(u,v,u_x,v_x)\big)_u u_x + \big(A_{u_x} u_{xx} - A_{v_x} v_{xx} + P(u,v,u_x,v_x)\big)_v v_x + \\ + \big(A_{u_x} u_{xx} - A_{v_x} v_{xx} + P(u,v,u_x,v_x)\big)_{u_x} u_{xx} + \big(A_{u_x} u_{xx} - A_{v_x} v_{xx} + P(u,v,u_x,v_x)\big)_{v_x} v_{xx} = \\ = \big(A_{uu_x} u_{xx} - A_{uv_x} v_{xx} + P_u\big) u_x + \big(A_{vu_x} u_{xx} - A_{vv_x} v_{xx} + P_v\big) v_x + \\ + \big(A_{u_x u_x} u_{xx} - A_{u_x v_x} v_{xx} + P_{u_x}\big) u_{xx} + \big(A_{v_x u_x} u_{xx} - A_{v_x v_x} v_{xx} + P_{v_x}\big) v_{xx}.\end{gathered}$$

Уравнение

$$\begin{gathered}A_u(u_{xx} + f(uv)\cdot u) + A_v(-v_{xx} - f(uv)\cdot v) + \\ + A_{u_x}(f'(uv)\cdot(u_x v + u v_x)\cdot u + f(uv)\cdot u_x) + \\ + A_{v_x}(-f'(uv)\cdot(u_x v + u v_x)\cdot v - f(uv)\cdot v_x) = \\ = \big(A_{uu_x} u_{xx} - A_{uv_x} v_{xx} + P_u\big) u_x + \big(A_{vu_x} u_{xx} - A_{vv_x} v_{xx} + P_v\big) v_x + \\ + \big(A_{u_x u_x} u_{xx} - A_{u_x v_x} v_{xx} + P_{u_x}\big) u_{xx} + \big(A_{v_x u_x} u_{xx} - A_{v_x v_x} v_{xx} + P_{v_x}\big) v_{xx}\end{gathered} \qquad (13)$$

представляет собой полином относительно переменных u_{xx} и v_{xx}. Приравняем коэффициенты при этих переменных

$$\begin{cases} A_u = A_{uu_x} u_x + A_{vu_x} v_x + P_{u_x}, \\ A_{u_x u_x} = 0, \\ -A_v = -A_{uv_x} u_x - A_{vv_x} v_x + P_{v_x}, \\ A_{v_x v_x} = 0. \end{cases} \qquad (14)$$

и доопределим $A = a(u,v)u_x v_x + b(u,v)v_x + c(u,v)u_x + d(u,v)$. Также из системы *(14)* остаются два соотношения

$$\begin{cases} P_{u_x} = (b_u - c_v)v_x - a_v v_x^2, \\ P_{v_x} = (b_u - c_v)u_x + a_u u_x^2. \end{cases} \qquad (15)$$

Продифференцируем первое соотношение *(15)* по v_x, а второе – по u_x и приравняем правые части. Уточним, что a является постоянной и

$$P = (b_u - c_v)v_x u_x + q(u,v).$$

Значит,

$$A = a u_x v_x + b(u,v)v_x + c(u,v)u_x + d(u,v)$$

и

$$B = (a v_x + c)u_{xx} - (a u_x + b)v_{xx} + (b_u - c_v)v_x u_x + q(u,v).$$

Теперь *(13)* упростим следующим образом

$$\begin{gathered}(b_u v_x + c_u u_x + d_u)\cdot f(uv)\cdot u - (b_v v_x + c_v u_x + d_v)\cdot f(uv)\cdot v + \\ + (a v_x + c)\cdot(f'(uv)\cdot(u_x v + u v_x)\cdot u + f(uv)\cdot u_x) + \\ + (a u_x + b)\cdot(-f'(uv)\cdot(u_x v + u v_x)\cdot v - f(uv)\cdot v_x) = \\ = \big((b_{uu} - c_{vu})v_x u_x + q_u\big)u_x + \big((b_{uv} - c_{vv})v_x u_x + q_v\big)v_x.\end{gathered} \qquad (16)$$

Выпишем коэффициенты при переменных $u_x v_x$, u_x, v_x, u_x^2, v_x^2, $u_x^2 v_x$ и $u_x v_x^2$

$$\begin{cases} a\big(f'(uv)\cdot uv + f(uv)\big) - a f'(uv)\cdot uv - a f(uv) = 0, \\ c_u f\cdot u - c_v f\cdot v + c\cdot\big(f'(uv)\cdot uv + f(uv)\big) - b f'(uv)\cdot v^2 = q_u, \\ b_u f\cdot u - b_v f\cdot v + c f'(uv)\cdot u^2 - b f'(uv)\cdot uv - b f(uv) = q_v, \\ -a f'(uv)\cdot v^2 = 0, \\ a f'(uv)\cdot u^2 = 0, \\ d_u f\cdot u - d_v f\cdot v = 0, \\ b_{uu} - c_{uv} = 0, \\ b_{uv} - c_{vv} = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} a f'(uv) = 0, \\ b_u - c_v = \alpha - const, \\ f(c_u u - c_v v + c) + f'(uv)\cdot(c uv - b v^2) = q_u, \\ f(b_u u - b_v v + b) + f'(uv)\cdot(c u^2 - b uv) = q_v, \\ d = \phi(uv). \end{cases} \qquad (17)$$

При $f'(uv) = 0$

$$\begin{cases} b_u - c_v = \alpha - const, \\ f(c_u u - c_v v + c) = q_u, \\ f(b_u u - b_v v + b) = q_v, \\ d = \phi(uv), \end{cases} \qquad (18)$$

а закон сохранения первого порядка *(10)* такой

$$D_t\big(au_xv_x+b(u,v)v_x+c(u,v)u_x+\phi(uv)\big)=$$
$$=D_x\big((av_x+c)u_{xx}-(au_x+b)v_{xx}+\alpha v_xu_x+q(u,v)\big).$$

При $f'(uv)\neq 0$, $a=0$

$$\begin{cases} b_u-c_v=\alpha-const,\\ f(c_uu-c_vv+c)+f'(uv)\cdot(cuv-bv^2)=q_u,\\ f(b_uu-b_vv+b)+f'(uv)\cdot(cu^2-buv)=q_v,\\ d=\phi(uv),\end{cases} \qquad (19)$$

закон сохранения первого порядка *(10)* примет вид

$$D_t(b(u,v)v_x+c(u,v)u_x+\phi(uv))=D_x(cu_{xx}-bv_{xx}+\alpha v_xu_x+q(u,v)).*$$

3. Закон сохранения второго порядка

Рассмотрим закон сохранения второго порядка

$$D_tA(u,v,u_x,v_x,u_{xx},v_{xx})=D_xB(u,v,u_x,v_x,u_{xx},v_{xx},u_{xxx},v_{xxx}) \qquad (20)$$

для системы *(3)*.

Соотношение *(20)* запишем в виде

$$A_uu_t+A_vv_t+A_{u_x}u_{xt}+A_{v_x}v_{xt}+A_{u_{xx}}u_{xxt}+A_{v_{xx}}v_{xxt}=$$
$$=B_uu_x+B_vv_x+B_{u_x}u_{xx}+B_{v_x}v_{xx}+B_{u_{xx}}u_{xxx}+B_{v_{xx}}v_{xxx}+B_{u_{xxx}}u_{xxxx}+B_{v_{xxx}}v_{xxxx}.$$

или, используя выражения системы *(3)*, последнее представим так

$$A_u(u_{xx}+f(uv)\cdot u)+A_v(-v_{xx}-f(uv)\cdot v)+A_{u_x}(u_{xxx}+f'(uv)\cdot(u_xv+uv_x)\cdot u+f(uv)\cdot u_x)+$$
$$+A_{v_x}(-v_{xxx}-f'(uv)\cdot(u_xv+uv_x)\cdot v-f(uv)\cdot v_x)+A_{u_{xx}}(u_{xx}+f(uv)\cdot u)_{xx}+$$
$$+A_{v_{xx}}(-v_{xx}-f(uv)\cdot v)_{xx}=B_uu_x+B_vv_x+$$
$$+B_{u_x}u_{xx}+B_{v_x}v_{xx}+B_{u_{xx}}u_{xxx}+B_{v_{xx}}v_{xxx}+B_{u_{xxx}}u_{xxxx}+B_{v_{xxx}}v_{xxxx}.$$

Последнее перепишем так

$$A_u(u_{xx}+f(uv)\cdot u)+A_v(-v_{xx}-f(uv)\cdot v)+A_{u_x}(u_{xxx}+f'(uv)\cdot(u_xv+uv_x)\cdot u+f(uv)\cdot u_x)+$$
$$+A_{v_x}(-v_{xxx}-f'(uv)\cdot(u_xv+uv_x)\cdot v-f(uv)\cdot v_x)+$$
$$+A_{u_{xx}}(u_{xxxx}+f''\cdot(uv^2u_x^2+2u^2vu_xv_x+u^3v_x^2)+f'\cdot(uvu_{xx}+4uu_xv_x+u^2v_{xx}+2vu_x^2)+f\cdot u_{xx})+$$
$$+A_{v_{xx}}(-v_{xxxx}-f''\cdot(v^3u_x^2+2uv^2u_xv_x+u^2vv_x)-f'\cdot(v^2u_{xx}+4vu_xv_x+uvv_{xx}+2uv_x^2)-f\cdot v_{xx})=$$
$$=B_uu_x+B_vv_x+B_{u_x}u_{xx}+B_{v_x}v_{xx}+B_{u_{xx}}u_{xxx}+B_{v_{xx}}v_{xxx}+B_{u_{xxx}}u_{xxxx}+B_{v_{xxx}}v_{xxxx}.$$

При независимых переменных u_{xxxx} и v_{xxxx} приравняем коэффициенты, тогда

$$\begin{cases} A_{u_{xx}}=B_{u_{xxx}},\\ -A_{v_{xx}}=B_{v_{xxx}}\end{cases} \qquad (21)$$

и

$$A_u(u_{xx}+f(uv)\cdot u)+A_v(-v_{xx}-f(uv)\cdot v)+A_{u_x}(u_{xxx}+f'(uv)\cdot(u_xv+uv_x)\cdot u+f(uv)\cdot u_x)+$$
$$+A_{v_x}(-v_{xxx}-f'(uv)\cdot(u_xv+uv_x)\cdot v-f(uv)\cdot v_x)+$$
$$+A_{u_{xx}}(f''\cdot(uv^2u_x^2+2u^2vu_xv_x+u^3v_x^2)+f'\cdot(uvu_{xx}+4uu_xv_x+u^2v_{xx}+2vu_x^2)+f\cdot u_{xx})+ \qquad (22)$$
$$+A_{v_{xx}}(-f''\cdot(v^3u_x^2+2uv^2u_xv_x+u^2vv_x)-f'\cdot(v^2u_{xx}+4vu_xv_x+uvv_{xx}+2uv_x^2)-f\cdot v_{xx})=$$
$$=B_uu_x+B_vv_x+B_{u_x}u_{xx}+B_{v_x}v_{xx}+B_{u_{xx}}u_{xxx}+B_{v_{xx}}v_{xxx}. \ (22)$$

Из *(21)* следует, что $B=A_{u_{xx}}u_{xxx}-A_{v_{xx}}v_{xxx}+G(u,v,u_x,v_x,u_{xx},v_{xx})$ и правая часть соотношения *(22)* примет вид

$$B_uu_x+B_vv_x+B_{u_x}u_{xx}+B_{v_x}v_{xx}+B_{u_{xx}}u_{xxx}+B_{v_{xx}}v_{xxx}=$$
$$=\big(A_{u_{xx}}u_{xxx}-A_{v_{xx}}v_{xxx}+G\big)_uu_x+\big(A_{u_{xx}}u_{xxx}-A_{v_{xx}}v_{xxx}+G\big)_vv_x+$$
$$+\big(A_{u_{xx}}u_{xxx}-A_{v_{xx}}v_{xxx}+G\big)_{u_x}u_{xx}+\big(A_{u_{xx}}u_{xxx}-A_{v_{xx}}v_{xxx}+G\big)_{v_x}v_{xx}+$$
$$+\big(A_{u_{xx}}u_{xxx}-A_{v_{xx}}v_{xxx}+G\big)_{u_{xx}}u_{xxx}+\big(A_{u_{xx}}u_{xxx}-A_{v_{xx}}v_{xxx}+G\big)_{v_{xx}}v_{xxx}=$$
$$=\big(A_{uu_{xx}}u_{xxx}-A_{uv_{xx}}v_{xxx}+G_u\big)u_x+\big(A_{vu_{xx}}u_{xxx}-A_{vv_{xx}}v_{xxx}+G_v\big)v_x+$$
$$+\big(A_{u_xu_{xx}}u_{xxx}-A_{u_xv_{xx}}v_{xxx}+G_{u_x}\big)u_{xx}+\big(A_{v_xu_{xx}}u_{xxx}-A_{v_xv_{xx}}v_{xxx}+G_{v_x}\big)v_{xx}+$$
$$+\big(A_{u_{xx}u_{xx}}u_{xxx}-A_{u_{xx}v_{xx}}v_{xxx}+G_{u_{xx}}\big)u_{xxx}+\big(A_{v_{xx}u_{xx}}u_{xxx}-A_{v_{xx}v_{xx}}v_{xxx}+G_{v_{xx}}\big)v_{xxx}.$$

Уравнение

$$A_u(u_{xx}+f(uv)\cdot u)+A_v(-v_{xx}-f(uv)\cdot v)+A_{u_x}(u_{xxx}+f'(uv)\cdot(u_xv+uv_x)\cdot u+f(uv)\cdot u_x)+$$
$$+A_{v_x}(-v_{xxx}-f'(uv)\cdot(u_xv+uv_x)\cdot v-f(uv)\cdot v_x)+$$
$$+A_{u_{xx}}(f''\cdot(uv^2u_x^2+2u^2vu_xv_x+u^3v_x^2)+f'\cdot(uvu_{xx}+4uu_xv_x+u^2v_{xx}+2vu_x^2)+f\cdot u_{xx})+$$
$$+A_{v_{xx}}(-f''\cdot(v^3u_x^2+2uv^2u_xv_x+u^2vv_x)-f'\cdot(v^2u_{xx}+4vu_xv_x+uvv_{xx}+2uv_x^2)-f\cdot v_{xx})=$$
$$=\big(A_{uu_{xx}}u_{xxx}-A_{uv_{xx}}v_{xxx}+G_u\big)u_x+\big(A_{vu_{xx}}u_{xxx}-A_{vv_{xx}}v_{xxx}+G_v\big)v_x+$$
$$+\big(A_{u_xu_{xx}}u_{xxx}-A_{u_xv_{xx}}v_{xxx}+G_{u_x}\big)u_{xx}+\big(A_{v_xu_{xx}}u_{xxx}-A_{v_xv_{xx}}v_{xxx}+G_{v_x}\big)v_{xx}+$$
$$+\big(A_{u_{xx}u_{xx}}u_{xxx}-A_{u_{xx}v_{xx}}v_{xxx}+G_{u_{xx}}\big)u_{xxx}+\big(A_{v_{xx}u_{xx}}u_{xxx}-A_{v_{xx}v_{xx}}v_{xxx}+G_{v_{xx}}\big)v_{xxx} \qquad (23)$$

представляет собой полином относительно переменных u_{xxx} и v_{xxx}. Приравняем коэффициенты при этих переменных

$$\begin{cases} A_{u_x} = A_{uu_{xx}}u_x + A_{vu_{xx}}v_x + A_{u_xu_{xx}}u_{xx} + A_{v_xu_{xx}}v_{xx} + G_{u_{xx}}, \\ 0 = A_{u_{xx}u_{xx}}, \\ -A_{v_x} = -A_{uv_{xx}}u_x - A_{vv_{xx}}v_x - A_{u_xv_{xx}}u_{xx} - A_{v_xv_{xx}}v_{xx} + G_{v_{xx}}, \\ 0 = -A_{v_{xx}v_{xx}}. \end{cases} \tag{24}$$

и равенство *(23)* упростим

$$\begin{gathered} A_u(u_{xx} + f(uv)\cdot u) + A_v(-v_{xx} - f(uv)\cdot v) + A_{u_x}(f'(uv)\cdot(u_xv + uv_x)\cdot u + f(uv)\cdot u_x) + \\ +A_{v_x}(-f'(uv)\cdot(u_xv + uv_x)\cdot v - f(uv)\cdot v_x) + \\ +A_{u_{xx}}(f''\cdot(uv^2u_x^2 + 2u^2vu_xv_x + u^3v_x^2) + f'\cdot(uvu_{xx} + 4uu_xv_x + u^2v_{xx} + 2vu_x^2) + f\cdot u_{xx}) + \\ +A_{v_{xx}}(-f''\cdot(v^3u_x^2 + 2uv^2u_xv_x + u^2vv_x) - f'\cdot(v^2u_{xx} + 4vu_xv_x + uvv_{xx} + 2uv_x^2) - f\cdot v_{xx}) = \\ = G_uu_x + G_vv_x + G_{u_x}u_{xx} + G_{v_x}v_{xx}. (25) \end{gathered} \tag{25}$$

Разрешим систему *(24),* тогда

$$A = a(u,v,u_x,v_x)u_{xx}v_{xx} + b(u,v,u_x,v_x)u_{xx} + c(u,v,u_x,v_x)v_{xx} + d(u,v,u_x,v_x).$$

Также из этой системы остаются два соотношения

$$\begin{cases} G_{u_{xx}} = \left(c_{u_x} - b_{v_x} - a_uu_x - a_vv_x\right)v_{xx} - a_{v_x}v_{xx}^2 + d_{u_x} - b_uu_x - b_vv_x, \\ G_{v_{xx}} = \left(c_{u_x} - b_{v_x} + a_uu_x + a_vv_x\right)u_{xx} + a_{u_x}u_{xx}^2 - d_{v_x} + c_uu_x + c_vv_x. \end{cases} \tag{26}$$

Продифференцируем первое соотношение *(26)* по v_{xx}, а второе – по u_{xx}, приравняем правые части. Тогда функция a удовлетворяет условию

$$D_xa = 0,$$

а, следовательно, a является постоянной.

Функция G определяется так

$$G = \left(c_{u_x} - b_{v_x}\right)v_{xx}u_{xx} + \left(d_{u_x} - b_uu_x - b_vv_x\right)u_{xx} - \left(d_{v_x} - c_uu_x - c_vv_x\right)v_{xx} + S(u,v,u_x,v_x).$$

В итоге

$$A = au_{xx}v_{xx} + b(u,v,u_x,v_x)u_{xx} + c(u,v,u_x,v_x)v_{xx} + d(u,v,u_x,v_x)$$

и

$$\begin{gathered} B = (av_{xx} + b)u_{xxx} - (au_{xx} + c)v_{xxx} + \left(c_{u_x} - b_{v_x}\right)v_{xx}u_{xx} + \\ +\left(d_{u_x} - b_uu_x - b_vv_x\right)u_{xx} - \left(d_{v_x} - c_uu_x - c_vv_x\right)v_{xx} + S(u,v,u_x,v_x). \end{gathered}$$

Теперь упростим уравнение *(25)*

$$\begin{gathered} (b_uu_{xx} + c_uv_{xx} + d_u)(u_{xx} + f(uv)\cdot u) + (b_vu_{xx} + c_vv_{xx} + d_v)(-v_{xx} - f(uv)\cdot v) + \\ +\left(b_{u_x}u_{xx} + c_{u_x}v_{xx} + d_{u_x}\right)(f'(uv)\cdot(u_xv + uv_x)\cdot u + f(uv)\cdot u_x) + \\ +\left(b_{v_x}u_{xx} + c_{v_x}v_{xx} + d_{v_x}\right)(-f'(uv)\cdot(u_xv + uv_x)\cdot v - f(uv)\cdot v_x) + \\ +(av_{xx} + b)(f''\cdot(uv^2u_x^2 + 2u^2vu_xv_x + u^3v_x^2) + f'\cdot(uvu_{xx} + 4uu_xv_x + u^2v_{xx} + 2vu_x^2) + f\cdot u_{xx}) + \\ +(au_{xx} + c)(-f''\cdot(v^3u_x^2 + 2uv^2u_xv_x + u^2vv_x) - f'\cdot(v^2u_{xx} + 4vu_xv_x + uvv_{xx} + 2uv_x^2) - f\cdot v_{xx}) = \\ = \left(\left(c_{uu_x} - b_{uv_x}\right)v_{xx}u_{xx} + \left(d_{uu_x} - b_{uu}u_x - b_{uv}v_x\right)u_{xx} - \left(d_{uv_x} - c_{uu}u_x - c_{uv}v_x\right)v_{xx} + S_u\right)u_x + \\ +\left(\left(c_{vu_x} - b_{vv_x}\right)v_{xx}u_{xx} + \left(d_{vu_x} - b_{uv}u_x - b_{vv}v_x\right)u_{xx} - \left(d_{vv_x} - c_{uv}u_x - c_{vv}v_x\right)v_{xx} + S_v\right)v_x + \\ +\left(\left(c_{u_xu_x} - b_{u_xv_x}\right)v_{xx}u_{xx} + \left(d_{u_xu_x} - b_{uu_x}u_x - b_u - b_{vu_x}v_x\right)u_{xx} - \left(d_{u_xv_x} - c_{uu_x}u_x - c_u - c_{vu_x}v_x\right)v_{xx} + S_{u_x}\right)u_{xx} + \\ +\left(\left(c_{u_xv_x} - b_{v_xv_x}\right)v_{xx}u_{xx} + \left(d_{u_xv_x} - b_{uv_x}u_x - b_{vv_x}v_x - b_v\right)u_{xx} - -\left(d_{v_xv_x} - c_{uv_x}u_x - c_{vv_x}v_x - c_v\right)v_{xx} + S_{v_x}\right)v_{xx}. \end{gathered}$$

Выпишем коэффициенты при переменных $u_{xx}v_{xx}$, u_{xx}, v_{xx}, u_{xx}^2, v_{xx}^2, $u_{xx}^2v_{xx}$ и $u_{xx}v_{xx}^2$

$$\begin{gathered} c_u - b_v + af'\cdot uv + af - af'\cdot uv - af = \left(c_{uu_x} - b_{uv_x}\right)u_x + \left(c_{vu_x} - b_{vv_x}\right)v_x - \\ -\left(d_{u_xv_x} - c_{uu_x}u_x - c_u - c_{vu_x}v_x\right) + d_{u_xv_x} - b_{uv_x}u_x - b_{vv_x}v_x - b_v; \\ d_u + b_uf\cdot u - b_vf\cdot v + b_{u_x}(f'\cdot(u_xv + uv_x)\cdot u + f\cdot u_x) + b_{v_x}(-f'\cdot(u_xv + uv_x)\cdot v - f\cdot v_x) + \\ +bf'\cdot uv + bf - af''\cdot(v^3u_x^2 + 2uv^2u_xv_x + u^2vv_x) - af'\cdot(4vu_xv_x + 2uv_x^2) - cf'\cdot v^2 = \\ = \left(d_{uu_x} - b_{uu}u_x - b_{uv}v_x\right)u_x + \left(d_{vu_x} - b_{uv}u_x - b_{vv}v_x\right)v_x + S_{u_x}; \\ c_uf\cdot u - d_v - c_vf\cdot v + c_{u_x}(f'\cdot(u_xv + uv_x)\cdot u + f\cdot u_x) + c_{v_x}(-f'\cdot(u_xv + uv_x)\cdot v - f\cdot v_x) + \\ +af''\cdot(uv^2u_x^2 + 2u^2vu_xv_x + u^3v_x^2) + af'\cdot(4uu_xv_x + 2vu_x^2) + bf'\cdot u^2 - cf'\cdot uv - cf = \\ = -\left(d_{uv_x} - c_{uu}u_x - c_{uv}v_x\right)u_x - \left(d_{vv_x} - c_{uv}u_x - c_{vv}v_x\right)v_x + S_{v_x}; \\ b_u - af'\cdot v^2 + d_{u_xu_x} - b_{uu_x}u_x - b_u - b_{vu_x}v_x = 0; \\ -c_v + af'\cdot u^2 - \left(d_{v_xv_x} - c_{uv_x}u_x - c_{vv_x}v_x - c_v\right) = 0; \\ 0 = c_{u_xu_x} - b_{u_xv_x}; \\ 0 = c_{u_xv_x} - b_{v_xv_x}; \\ d_uf\cdot u - d_vf\cdot v + d_{u_x}(f'\cdot(u_xv + uv_x)\cdot u + f\cdot u_x) + d_{v_x}(-f'\cdot(u_xv + uv_x)\cdot v - f\cdot v_x) + \\ +bf''\cdot(uv^2u_x^2 + 2u^2vu_xv_x + u^3v_x^2) + bf'\cdot(4uu_xv_x + 2vu_x^2) - \\ -cf''\cdot(v^3u_x^2 + 2uv^2u_xv_x + u^2vv_x) - cf'\cdot(4vu_xv_x + 2uv_x^2) = S_uu_x + S_vv_x. \end{gathered}$$

Первое, четвертое, пятое, шестое, седьмое преобразуем в виде

$$0 = \left(c_{u_x} - b_{v_x}\right)_u u_x + \left(c_{u_x} - b_{v_x}\right)_v v_x;$$

$$-af' \cdot v^2 + d_{u_x u_x} - b_{u u_x} u_x - b_{v u_x} v_x = 0; \tag{27}$$

$$af' \cdot u^2 - \left(d_{v_x v_x} - c_{u v_x} u_x - c_{v v_x} v_x\right) = 0; \tag{28}$$

$$0 = \left(c_{u_x} - b_{v_x}\right)_{u_x};$$

$$0 = \left(c_{u_x} - b_{v_x}\right)_{v_x}.$$

Из последних соотношений следует, что $c_{u_x} - b_{v_x} = \beta$ – постоянная.

Соотношения *(27)* и *(28)* продифференцируем дважды по v_x и по u_x соответственно и просуммируем, тогда получим

$$\left(c_{u_x} - b_{v_x}\right)_{u u_x v_x} u_x + \left(c_{u_x} - b_{v_x}\right)_{v u_x v_x} v_x + 2(c_u - b_v)_{u_x v_x} = 0.$$

Так как первые два слагаемых равны нулю, то

$$(c_u - b_v)_{u_x v_x} = 0.$$

Отсюда выразим $c_u - b_v = H_1(u, v, u_x) + H_2(u, v, v_x)$.

При выполнении следующих соотношений

$$c_{u_x} - b_{v_x} = \beta - const;\ c_u - b_v = H_1(u, v, u_x) + H_2(u, v, v_x);$$

$$af' \cdot u^2 - \left(d_{v_x v_x} - c_{u v_x} u_x - c_{v v_x} v_x\right) = 0;\ -af' \cdot v^2 + d_{u_x u_x} - b_{u u_x} u_x - b_{v u_x} v_x = 0;$$

$$d_u + b_u f \cdot u - b_v f \cdot v + +b_{u_x}(f' \cdot (u_x v + u v_x) \cdot u + f \cdot u_x) + b_{v_x}(-f' \cdot (u_x v + u v_x) \cdot v - f \cdot v_x) +$$
$$+bf' \cdot uv + bf - af'' \cdot (v^3 u_x^2 + 2uv^2 u_x v_x + u^2 v v_x) - -af' \cdot (4v u_x v_x + 2u v_x^2) - cf' \cdot v^2 =$$
$$= \left(d_{u u_x} - b_{uu} u_x - b_{uv} v_x\right) u_x + \left(d_{v u_x} - b_{uv} u_x - b_{vv} v_x\right) v_x + S_{u_x};$$

$$c_u f \cdot u - d_v - c_v f \cdot v + c_{u_x}(f' \cdot (u_x v + u v_x) \cdot u + f \cdot u_x) + +c_{v_x}(-f' \cdot (u_x v + u v_x) \cdot v - f \cdot v_x) +$$
$$+af'' \cdot (uv^2 u_x^2 + 2u^2 v u_x v_x + u^3 v_x^2) + af' \cdot (4u u_x v_x + 2v u_x^2) + bf' \cdot u^2 - cf' \cdot uv - cf =$$
$$= \left(-d_{u v_x} + c_{uu} u_x + 2c_{uv} v_x\right) u_x + \left(-d_{v v_x} + c_{vv} v_x\right) v_x + S_{v_x},$$

а закон сохранения второго порядка *(20)* имеет вид

$$D_t(a u_{xx} v_{xx} + b(u, v, u_x, v_x) u_{xx} + c(u, v, u_x, v_x) v_{xx} + d(u, v, u_x, v_x)) =$$
$$= D_x\left((a v_{xx} + b) u_{xxx} - (a u_{xx} + c) v_{xxx} + \left(c_{u_x} - b_{v_x}\right) v_{xx} u_{xx} + \left(d_{u_x} - b_u u_x - b_v v_x\right) u_{xx} - \left(d_{v_x} - c_u u_x - c_v v_x\right) v_{xx} + S(u, v, u_x, v_x)\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. В., Шабат А. Б. Условия интегрируемости системы двух уравнений вида $u_t = A(u) u_{xx} + F(u, u_x)$. М.: ТМФ, 1985. Т. 62. №2. С. 163–185.
2. Михайлов А. В., Шабат А. Б. Условия интегрируемости системы двух уравнений вида $u_t = A(u) u_{xx} + F(u, u_x)$. М.: ТМФ, 1986. Т. 66. №1. С. 47–65.
3. Муртазина Р. Д., Садриева Р. Т., Сидельникова Н. А. Регулярность решения радиального уравнения // Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27. №1. С. 18–24.
4. Галина Г. К., Муртазина Р. Д., Садриева Р. Т., Сидельникова Н. А., Низамова А.Д. Исследование решения одномерного стационарного уравнения Шредингера на бесконечности // Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27. №2. С. 250–258.
5. Гюнтер Н. М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М.; Л.: ОНТИ Гос. технико-теорет. изд-во, 1934. С. 363.
6. Кудашева Е. Г., Муртазина Р. Д., Низамова А. Д., Сидельникова Н. А. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Устойчивость течения жидкостей в канале с линейным профилем температуры. М.: Русайнс, 2021. 134 с.
7. Сидельникова Н. А., Жибер А. В., Муртазина Р. Д. Дифференциальные уравнения гиперболического типа. Уфа: РИЦ БашГУ, 2021. 110 с.
8. Сидельникова Н. А. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Уфа: РИЦ БашГУ, 2020. 92 с.
9. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике: учеб. пос. М.: изд-во МГУ, 1993. 352 с.
10. Шабат А. Б., Ямилов Р. И. О полном списке интегрируемых систем уравнений вида $iu_t = u_{xx} + f(u, v, u_x, v_x)$, $-iv_t = u_{xx} + g(u, v, u_x, v_x)$: препринт. Уфа: БФАН СССР, 1985. 28 с.

Поступила в редакцию 02.02.2023 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2023.1.3

CONSERVATION LAWS OF THE NONLINEAR SCHRODINGER EQUATION

© E. R. Shaihiev[1], R. D. Murtazina[1], A. D. Nezamova[2], N. A. Sidel'nikova[1]*, G. K. Galina[1]

[1]Ufa University of Science and Technology
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

[2]R. R. Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center of RAS
71 Oktyabrya Avenue, 450054 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (347) 229 96 32.
**Email: zhiber.na@gmail.ru*

In this paper, the conservation laws of zero, first and second orders are obtained and a symmetric analysis of the nonlinear Schrodinger equation of the following form is carried out:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(uv) \cdot u, \\ v_t = -v_{xx} - f(uv) \cdot v. \end{cases}$$

Special cases of this system of equations were studied in previous works, in which conditions were obtained that the right part of the system of equations of this type, which has a wide set of conservation laws, should satisfy. As a result, we obtained the law of conservation of zero order for this equation, in the following form:

$$D_t(uv) = D_x(vu_x - uv_x).$$

We also derived the first-order conservation law for the nonlinear Schrodinger equation under consideration, in the following form:

$$D_t(b(u,v)v_x + c(u,v)u_x + \phi(uv)) = D_x(cu_{xx} - bv_{xx} + \alpha v_x u_x + q(u,v)).$$

Finally, in conclusion, we give the law of conservation of the second order of the equation we are considering:

$$D_t(au_{xx}v_{xx} + b(u,v,u_x,v_x)u_{xx} + c(u,v,u_x,v_x)v_{xx} + d(u,v,u_x,v_x) =$$
$$= D_x\Big((av_{xx} + b)u_{xxx} - (au_{xx} + c)v_{xxx} + \big(c_{u_x} - b_{v_x}\big)v_{xx}u_{xx} + \big(d_{u_x} - b_u u_x - b_v v_x\big)u_{xx} -$$
$$-\big(d_{v_x} - c_u u_x - c_v v_x\big)v_{xx} + S(u,v,u_x,v_x)\Big).$$

Keywords: nonlinear Schrodinger equation, conservation law, transformation, full differentiation operator, system of differential equations, symmetric analysis.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

1. Mikhailov A. V., Shabat A. B. Usloviya integriruemosti sistemy dvukh uravnenii vida u_t=A(u)u_{xx}+F(u,u_x). Moscow: TMF, 1985. Vol. 62. No. 2. Pp. 163–185.
2. Mikhailov A. V., Shabat A. B. Usloviya integriruemosti sistemy dvukh uravnenii vida u_t=A(u)u_{xx}+F(u,u_x). Moscow: TMF, 1986. Vol. 66. No. 1. Pp. 47–65.
3. Murtazina R. D., Sadrieva R. T., Sidel'nikova N. A. Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2022. Vol. 27. No. 1. Pp. 18–24.
4. Galina G. K., Murtazina R. D., Sadrieva R. T., Sidel'nikova N. A., Nizamova A. D. Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2022. Vol. 27. No. 2. Pp. 250–258.
5. Gyunter N. M. Integrirovanie uravnenii pervogo poryadka v chastnykh proizvodnykh [Integration of first order partial differential equations]. M.; Leningrad: ONTI Gos. tekhniko-teoret. izd-vo, 1934. Pp. 363.
6. Kudasheva E. G., Murtazina R. D., Nizamova A. D., Sidel'nikova N. A. Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka. Ustoichivost' techeniya zhidkostei v kanale s lineinym profilem temperatury. Moscow: Rusains, 2021.
7. Sidel'nikova N. A., Zhiber A. V., Murtazina R. D. Differentsial'nye uravneniya giperbolicheskogo tipa [Differential equations of hyperbolic type]. Ufa: RITs BashGU, 2021.
8. Sidel'nikova N. A. Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka [First order partial differential equations]. Ufa: RITs BashGU, 2020.
9. Sveshnikov A. G., Bogolyubov A. N., Kravtsov V. V. Lektsii po matematicheskoi fizike: ucheb. pos. [Lectures on mathematical physics: textbook]. Moscow: izd-vo MGU, 1993.
10. Shabat A. B., Yamilov R. I. O polnom spiske integriruemykh sistem uravnenii vida $iu_t=u_{xx}+f(u,v,u_x,v_x)$, $-iv_t=u_{xx}+g(u,v,u_x,v_x)$: preprint [On the complete list of integrable systems of equations of the form $iu_t = u_{xx} + f(u,v,u_x,v_x)$, $-iv_t = u_{xx} + g(u,v,u_x,v_x)$: preprint]. Ufa: BFAN SSSR, 1985.

Received 02.02.2023.