

УДК 51-37; 546

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2023.1.5

## ОЦЕНКА ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫМ И СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДАМИ И ИХ ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ В ВОЛЬТАМПЕРОМЕТРИЧЕСКИХ МУЛЬТИСЕНСОРНЫХ СИСТЕМАХ

© А. Д. Низамова<sup>1</sup>, Р. Д. Муртазина<sup>2</sup>, А. В. Сидельников<sup>2</sup>,  
Н. А. Сидельникова<sup>2\*</sup>, Л. Д. Шарипова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН  
Россия, Республика Башкортостан, 450054 г. Уфа, пр. Октября, 71.

<sup>2</sup>Уфимский университет науки и технологий  
Россия, Республика Башкортостан 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел.: +7 (347) 229 96 32.

\*Email: zhiber.na@gmail.ru

Современные математические методы обработки экспериментальных данных и их реализация с использованием компьютерных технологий открывают новые возможности в исследовании химических реакций и процессов. В частности, на стыке химии и математики в конце XX в. активно стали развивать хемометрические подходы к извлечению и расшифровке физико-химической информации о химических объектах. В аналитической химии и химической технологии стали применять экспрессные способы контроля производства, в которых потоки жидкостей и их мониторинг, своевременный контроль химического состава в динамических условиях определяет качество конечного продукта. Важно отметить, что высокая чувствительность и точность описания таких систем, к примеру, в проточном анализе, или для «лабораторий на чипе», в наносенсорах, при анализе следовых количеств веществ определяет в целом все метрологические характеристики аналитической методики. Актуальными в этом направлении являются методики мультисенсорного анализа с использованием принципа «электронного языка» – анализа веществ органической природы – нефть, топливо, моторные/трансмиссионные масла, распознавание/классификация которых с помощью классических методик требует специальной пробоподготовки. А в некоторых сенсорных системах, например, потенциометрии, без защиты электрода от прямого воздействия органических вязких веществ невозможно получить надежный воспроизводимый аналитический сигнал. Предлагаемые в работе способы количественного описания устойчивости течений жидкостей универсальны и с достаточной точностью, на наш взгляд, могут характеризовать течение объекта в протяженном временном отрезке в новых по типу функционирования сенсорах – темпоральных перколяционных кластерах, аналитическими сигналами в которых могут являться собственные значения и функции.

Конечно-разностные методы являются эффективными при нахождении наименее устойчивого собственного значения и собственных функций. Методы спектрального разложения позволяют отыскать спектр собственных значений, т.е. решать основную проблему задачи об устойчивости течений жидкостей.

В настоящей работе проведена оценка относительной погрешности вычислений краевой задачи конечно-разностным и спектральным методами. Представлены графики количества знаков относительной погрешности вычислений для нескольких собственных значений. В случае конечно-разностного метода происходит взаимное влияние компонент разложения. По результатам численных вычислений можно сделать вывод о том, что полученная точность вычислений является удовлетворительной.

**Ключевые слова:** относительная погрешность, краевая задача, конечно-разностный метод, спектральный метод, мультисенсорная система.

Исследованию задач о гидродинамической устойчивости течения жидкостей посвящено множество работ [2–3; 5–7]. Главной целью численного решения при заданных параметрах невозмущенного течения является вычисление собственных значений и функций. Основные методы решения данной задачи можно разделить на следующие классы: класс конечно-разностных методов [4; 9; 12]; класс спектральных методов, которые используют разложение по полной системе ортогональных функций [10–11].

### Конечно-разностный метод

Конечно-разностные методы [13] являются эффективными при нахождении наименее устойчивого собственного значения и собственных функций.

Автором настоящей работы написан программный код на языке Fortran90 для решения задачи Коши методом конечных разностей. В качестве метода решения проблемы собственных значений используется QR-алгоритм.

*QR*-алгоритм – это численный метод, определенный для решения проблемы собственных значений, т.е. для поиска всех собственных чисел и собственных функций. Этот метод разработан в конце 1950-х гг. двумя исследователями В. Н. Кублановской и Дж. Фрэнсисом [8] независимо друг от друга.

**Алгоритм.** Если  $A$  является вещественной матрицей с неизвестными собственными числами и векторами и  $A_0 = A$ , то на шаге  $k$  вычисляется *QR*-разложение  $A_k = Q_k R_k$ , в котором  $Q_k$  является ортогональной матрицей, а  $R_k$  – верхнетреугольной. Далее определяется  $A_k = R_k Q_k$ . Стоит отметить, что все матрицы  $A_k$  являются взаимно подобными (их собственные значения равны). В случае, когда матрица  $A$  является комплексной, матрица  $Q_k$  будет унитарной (квадратная матрица с комплексными элементами, результат умножения которой на эрмитово сопряженную равен единичной матрице), а  $R_k$  также является верхнетреугольной.

Если  $A$  – квадратная невырожденная матрица, то существует единственное *QR*-разложение, если наложить дополнительное условие, что элементы на диагонали матрицы  $R$  должны быть положительными вещественными числами.

Если предположить, что все диагональные миноры матрицы  $A$  не вырождены, то последовательность матриц  $A_k$  при  $k \rightarrow \infty$  будет сходиться к верхнетреугольному виду [1]. А для нахождения собственных функций матрицы необходимо выполнить умножение всех матриц  $Q_k$ .

Алгоритм метода является вычислительно устойчивым, т.к. выполняется с помощью ортогональных преобразований подобия.

Рассмотрим дифференциальное уравнение со следующими краевыми условиями:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y(2\pi) = 0, \end{cases}$$

где  $\lambda$  – собственные значения.

При нахождении матрицы дифференциального уравнения с заданными краевыми условиями использованы формулы конечной разности IV порядка точности:

$$\begin{aligned} y'_i &= \frac{1}{12h} (y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}), \\ y''_i &= \frac{1}{12h^2} (-y_{i-2} + 16y_{i-1} - 30y_i + 16y_{i+1} - y_{i+2}). \end{aligned}$$

А в матричном виде:

$$\frac{1}{12h^2} \begin{pmatrix} 30 & -16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 30 & -16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -16 & 30 & -16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -16 & 30 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -16 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

где  $h = \frac{2\pi}{n}$ ,  $n$  – количество точек.

Точное решение данной задачи имеет вид:  $\lambda_k = \frac{k^2}{4}$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$

Полученные численные результаты представлены в табл. 1.

На рис. 1 представлены графики зависимости относительной погрешности вычислений от количества точек. После сравнения численных результатов с точным решением можно наблюдать стремление погрешности к некоторой постоянной величине. При сравнении с эталоном, полученным эмпирически (0.250178087; 1.000938844), происходит уменьшение погрешности. Стоит отметить, что в этом случае происходит взаимное влияние компонент разложения. Таким образом, можно сделать вывод о том, что полученная точность вычислений является удовлетворительной.

Таблица 1

Десять собственных значений для разных значений точек

$k$	Результат точного решения, $\lambda_k$	$n=10$	$n=20$	$n=40$	$n=80$
1	0.25	0.25725123	0.25395754	0.25214982	0.25118712
2	1	1.0258983	1.0154542	1.0085518	1.004815
3	2.25	2.2910991	2.2828949	2.2690427	2.2608464
4	4	4.0121217	4.052125	4.0332289	4.0192452
5	6.25	6.1058765	6.3143072	6.3003526	6.2799444
6	9	8.4357405	9.0533819	9.0689964	9.0427933
7	12.25	10.812476	12.243399	12.336947	12.307644
8	16	13.00982	15.845826	16.100733	16.074221
9	20.25	14.79351	19.807602	20.355215	20.342077
10	25	15.958154	24.060011	25.093622	25.11088

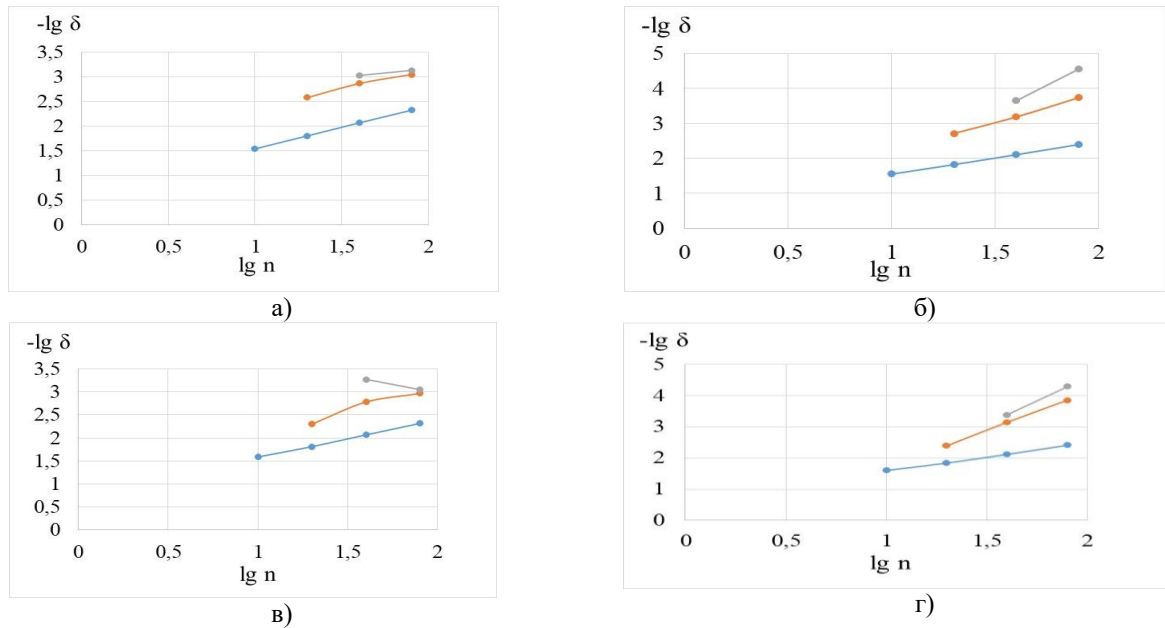


Рис. 1. Относительная погрешность вычислений конечно-разностным методом: сравнение с точным решением:  $\lambda_k = 0.25$  (а);  $\lambda_k = 1$  (в); сравнение с эталоном:  $\lambda_k = 0.25$  (б);  $\lambda_k = 1$  (г).

**Спектральный метод**

Методы спектрального разложения позволяют отыскать спектр собственных значений, т.е. решать основную проблему задачи об устойчивости течений жидкостей. Так, с помощью разложения по полиномам Чебышева были исследованы несколько первых собственных значений для течения Пуазейля [12], а с помощью метода Галеркина по полиномам Лежандра был исследован спектр течения Блазиуса [11].

Авторами настоящей работы используется спектральный метод с помощью разложения по полиномам Чебышева первого рода для решения задачи об устойчивости течения в плоском канале с заданным неоднородным температурным полем [14–16]:

$$\mu_0 \cdot [\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi] - ik \operatorname{Re}[(u_0 - c) \cdot (\varphi'' - k^2\varphi) - u_0''\varphi] + 2\mu_0' \cdot (\varphi''' - k^2\varphi') + \mu_0''(\varphi'' + k^2\varphi) = 0,$$

с граничными условиями:

$$\phi(-1) = \phi(1) = 0, \quad \phi'(-1) = \phi'(1) = 0,$$

где  $c = c_r + ic_i$  – фазовая скорость волны вдоль оси канала (собственные значения),  $\phi(y)$  – амплитуда возмущения поперечной скорости (собственные функции).

Решение данной задачи ищем с помощью следующего разложения:

$$\phi = \sum_{n=0}^N z_n T_n(y), \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (1)$$

где  $T_n(y)$  являются полиномами Чебышева первого рода и могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения:

$$T_0(y) = 1; \\ T_1(y) = y;$$

...

$$T_{n+1}(y) = 2yT_n(y) - T_{n-1}(y),$$

или в тригонометрической форме:

$$T_n(y) = \cos(n \cdot \arccos(y)), \quad |y| \leq 1.$$

Найденную аналитически функцию профиля скорости течения в невозмущенном состоянии представим следующим рядом:

$$U(y) = \sum_{n=0}^N u_n T_n(y), \quad -1 \leq y \leq 1 \quad (2)$$

и найдем соответствующие коэффициенты разложения  $u_n$ .

Далее с помощью подстановки (1), (2) в исходное уравнение приравняем коэффициенты при различных  $T_n$  и получаем уравнения для  $z_n$ :

$$\frac{1}{24}\mu \sum_{\substack{p=n+4 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N [p^3(p^2 - 4)^2 - 3n^2p^5 + 3n^4p^3 - pn^2(n^2 - 4)^2]z_p - (2k^2\mu - ik \operatorname{Re} c) \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2)z_p + (k^4\mu - ik \operatorname{Re} c)d_n z_n - \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2}ik \operatorname{Re} \sum_{p=2}^N z_p \sum_{\substack{m \equiv p \pmod{2} \\ |m| \leq p-2 \\ |n-m| \leq N}} p(p^2 - n^2)\bar{u}_{n-m} - k^2 \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} \bar{z}_p \bar{u}_{n-p} - \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} \bar{z}_p \sum_{\substack{m \equiv |n-p|+2 \\ m+n \equiv p \pmod{2}}} m(m^2 - (n-p)^2)u_n = 0,$$

где

$$\bar{z}_p = d_{|p|} z_{|p|}; \quad \bar{u}_p = d_{|p|} u_{|p|}; \\ -N \leq p \leq N; \quad d_0 = 2; \quad d_p = 1; \quad p > 0$$

и  $p \equiv n \pmod{2}$  обозначает, что  $p = n$  кратно двум.

Также, применяя свойства полиномов Чебышева на концах отрезка  $[-1; 1]$

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad T_n'(\pm 1) = (\pm 1)^n n^2,$$

граничные условия настоящей задачи при  $y = -1$  и  $y = 1$  можно переписать так

$$\sum_{n=0, n \equiv 0 \pmod{2}}^N z_n = 0, \quad \sum_{n=0, n \equiv 0 \pmod{2}}^N n^2 z_n = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{n \equiv 1 \pmod{2}}^N n z_n = 0, \quad \sum_{n \equiv 1 \pmod{2}}^N n^2 z_n = 0. \quad (5)$$

Стоит отметить, что для течений с симметричным профилем достаточно рассматривать только четные  $z_n$ ,  $n = 0, 2, \dots, N = 2M$  (условия (5) выполняются автоматически), и размерность системы уравнений (3) уменьшается в два раза.

Для того чтобы найти  $M + 1$  неизвестных коэффициентов  $z_{2m}$ ,  $m = 0, 1, \dots, M = N/2$ , из  $M + 3$  уравнений применяется  $\tau$ -метод, заключающийся в откидывании последних двух уравнений ( $m = M - 1, M$ ), тогда с граничными условиями (4) получаются  $M + 1$  уравнение для  $M + 1$  неизвестных  $z_{2m}$ ,  $m = 0, 1, \dots, M - 1$ . Таким образом, из (3) получаем

$$Az = cBz, \quad (6)$$

где  $z$  – вектор с неизвестными компонентами,  $A, B$  – матрицы размерности  $(M + 1) \times (M + 1)$ , которые можно записать следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 4 & 9 & \dots & N^2 \\ 0 & 0 & a_{11} & \dots & a_{1,M-1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & a_{M-1,1} & \dots & a_{M-1,M-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & \dots & b_{1,M-1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & b_{M-1,1} & \dots & b_{M-1,M-1} \end{pmatrix}.$$

Первые две строчки матриц  $A$  и  $B$  были получены с помощью граничных условий (4), а элементы  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  – из уравнений (3). Матрица  $B$  является особенной из-за нулевых первых строк, и появляются дополнительные сложности с поиском ее обращения. Поэтому такими алгебраическими преобразованиями матриц, как обнуление внедиагональных элементов, и нормируя диагональные элементы первых двух строк матрицы  $A$ , и применяя это преобразование одновременно к матрице  $B$ , можем избежать появления дополнительных трудностей:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1,M-1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{M-1,1} & \dots & \tilde{a}_{M-1,M-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{b}_{11} & \dots & \tilde{b}_{1,M-1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \tilde{b}_{M-1,1} & \dots & \tilde{b}_{M-1,M-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда собственные значения

$$(\tilde{A} - c\tilde{B})\tilde{z} = 0, \quad (7)$$

где  $A$  и  $B$  – являются невырожденными матрицами. Далее, используя алгоритм  $QZ$  к уравнениям (7), находим искомые собственные значения. Обратными преобразованиями найдем  $z$  для дальнейшего поиска собственных функций из вычисленных  $\tilde{z}$  применяя (1).

Рассмотрим тот же пример дифференциального уравнения с краевыми условиями:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Результаты численных вычислений представлены в табл. 2.

На рис. 2 представлены графики количества знаков относительной погрешности вычислений  $\delta$  для нескольких собственных значений. Можно видеть, что вычисления меняются, и с некоторого номера  $n = N$  результаты ухудшаются. Этот факт объясняется тем, что при  $n = 1, \dots, N - 1$  компоненты разложения намного меньше основной части решения и не влияют на результат, но, начиная с некоторого  $n = N$  компоненты разложения увеличиваются, и их влияние на результат является преимущественным. Также надо учесть влияние компонент разложения друг на друга при вычислениях, погрешность округления и накопление погрешностей. Прямые линии 2 на графиках являются аппроксимацией кривых 1 и характеризуют уменьшение точности вычислений.

Таким образом, можно видеть, что точность вычислений является удовлетворительной до 14 знаков после запятой.

Таблица 2

Десять собственных значений задачи для разных значений точек

Результат точного решения	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 80$
0.25	0.2499999999994	0.250000000000107	0.250000000000008	0.250000000545674
1	1.00000000000006	1.000000000000029	1.000000000000064	0.9999999100879
2.25	2.2499999999995	2.24999999999863	2.250000000000026	2.2499999992674
4	3.9999999999989	3.9999999999997	3.9999999999945	4.00000000090153
6.25	6.25000000000003	6.24999999998631	6.2499999999132	6.2499999905536
9	8.9999999999993	8.9999999999976	9.00000000000046	8.9999999997708
12.25	12.2499999999999	12.25000000000153	12.2500000000052	12.249999998953
16	15.9999999999999	16.0000000000003	16.0000000000004	16.0000000003196
20.25	20.2499999999997	20.2499999999997	20.2500000000019	20.2499999983367
25	25.0000000000002	24.9999999999998	24.9999999999988	24.999999999993

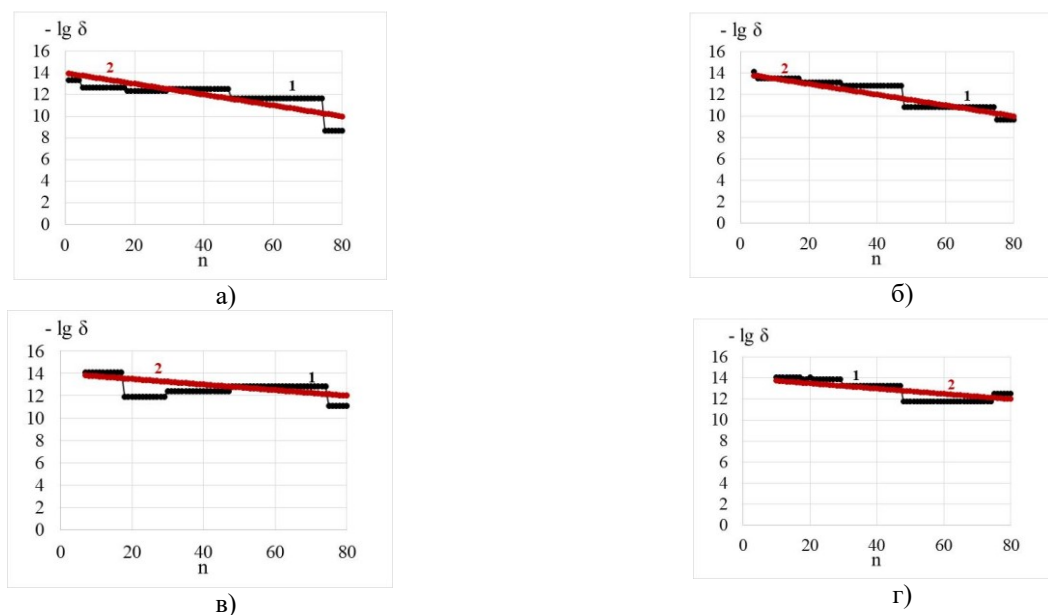


Рис. 2. Относительная погрешность вычислений спектральным методом: численные результаты (1); аппроксимация результатов (2) для  $\lambda_n = 0.25$  (а);  $\lambda_n = 4$  (б);  $\lambda_n = 12.25$  (в);  $\lambda_n = 25$  (г).

Таким образом, в отличие от классических подходов, в частности в вольтамперметрических, с помощью таких параметров учитываются не только статическое состояние анализируемого объекта до и после воздействия на него внешних факторов (электрического напряжения или тока), но и скорость изменения его состояний – его эволюция, темпоральность при перколяции анализируемой жидкости в объеме сенсорного слоя. Полученные в работе результаты показывают не только высокую точность количественного описания анализируемой жидкости, но и увеличение количества сигналов, что позволит, по нашему мнению, улучшить метрологические характеристики функционирования сенсоров при данных показателях ошибок.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. 3-е изд. М: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2004. С. 321–636.
2. Бойко А. В., Грек Г. Р., Довгаль А. В., Козлов В. В. Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. Исследований, 2006. 304 с.
3. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 421 с.
4. Дармаев Т. Г. Анализ эффективности различных методов численного решения задачи Орра – Зоммерфельда // Математика, ее приложения и математическое образование: Мат-лы Междунар. конф. Ч. 1. Улан-Удэ, 2002. С. 156–160.
5. Нейман-заде М. И., Шкаликов А. А. О вычислении собственных значений задачи Орра-Зоммерфельда // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8. Вып. 1. С. 301–305.
6. Скороходов С. Л. Численный анализ спектра задачи Орра – Зоммерфельда // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. №10. С. 1672–1691.
7. Туманов С. Н., Шкаликов А. А. О локализации спектра задачи Орра – Зоммерфельда для больших чисел Рейнольдса // Матем. заметки. 72:4. 2002. С. 561–569.
8. Шкаликов А. А. Спектральные портреты оператора Орра – Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // Труды

международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям – сателлита Международного конгресса математиков ICM-2002 (М., МАИ, 11–17 августа, 2002). Ч. 3. СМФН. 3. М.: МАИ, 2003. С. 89–112.

9. Mack L. M. A numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the Blasius boundary layer // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 73. №3. Pp. 497–520.
10. Melenk J. M., Kirchner N. P., Schwab C. Spectral Galerkin discretization for hydrodynamic stability problems // Computing. 2000. Vol. 65. Pp. 97–118.
11. Orszag S. A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // Journal of Fluid Mechanics. 1971. Vol. 50. P. 4. Pp. 689–703.
12. Thomas L. N. The stability of plane Poiseuille flow // Phys. Rev. 1953. Vol. 90. Pp. 780–783.
13. Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Муксимова Р. Р. Особенности процесса накопления погрешностей при решении задач для простейших уравнений математической физики конечно-разностными методами // Сибирский журнал вычислительной математики. 2016. Т. 19. №2. С. 139–152.
14. Nizamova A. D., Murtazina R. D., Kireev V. N., Urmancheev S. F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 9. Pp. 2211–2215. DOI: 10.1134/S1995080221090249.
15. Низамова А. Д., Киреев В. Н., Урманчев С. Ф. О неизоотермической задаче устойчивости течения вязкой жидкости в плоском канале // Вестник УГАТУ. 2021. Т. 25. №4(94). С. 76–82. DOI: 10.54708/19926502\_2021\_2549476.
16. Низамова А. Д., Киреев В. Н., Урманчев С. Ф. Влияние зависимости вязкости от температуры на спектральные характеристики уравнения устойчивости течения термовязких жидкостей // Многофазные системы, 2019. Т. 14. №1. С. 52–58.
17. Садриева Р. Т., Сидельникова Н. А., Муртазина Р. Д. Регулярность решения радиального уравнения // Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27. №1. С. 18–24.
18. Кудашева Е. Г., Муртазина Р. Д., Низамова А. Д., Сидельникова Н. А. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Устойчивость течения жидкостей в канале с линейным профилем температуры. М.: Русайнс, 2021. 134 с.
19. Sidel'nikov A. Voltammetric identification of motor oils using electronic tongue on carbon-paste electrode basis / A. Sidel'nikov, D. Bikmeev, F. Kudasheva, V. Maystrenko // J. Chem. Chem. Eng. 2012. V. 6. P. 199–208.

Поступила в редакцию 14.02.2023 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2023.1.5

**THE ESTIMATION OF THE RELATIVE ERROR OF CALCULATIONS  
OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM BY FINITE-DIFFERENCE  
AND SPECTRAL METHODS AND THEIR PROSPECTS  
FOR APPLICATION IN VOLTAMMETRIC MULTISENSOR SYSTEMS**

© A. D. Nizamova<sup>1</sup>, R. D. Murtazina<sup>2</sup>, A. V. Sidel'nikov<sup>2</sup>,  
N. A. Sidel'nikova<sup>2\*</sup>, L. D. Sharipova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*R. R. Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center of RAS  
71 Oktyabrya Avenue, 450054 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

<sup>2</sup>*Ufa University of Science and Technology  
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

*Phone: +7 (347) 229 96 32.*

*\*Email: zhiber.na@gmail.ru*

Modern mathematical methods of experimental data processing and their implementation using computer technologies open up new opportunities in the study of chemical reactions and processes. In particular, at the junction of chemistry and mathematics at the end of the 20th century, chemometric approaches to the extraction and decoding of physico-chemical information about chemical objects began to be actively developed. In analytical chemistry and chemical technology, express methods of production control began to be used, in which the flow of liquids and their monitoring, timely control of the chemical composition in dynamic conditions determines the quality of the final product. It is important to note that the high sensitivity and accuracy of the description of such systems, for example in flow analysis, in nanosensors and "laboratories on a chip", when analyzing trace amounts of substances, determine in general all the metrological characteristics of the analytical technique. The methods of multisensory analysis using the principle of "electronic language" are relevant in this direction, for example for the analysis of substances of organic nature (fuel, engine/transmission oils), the recognition/classification of which by classical techniques requires special sample preparation. In addition, they can be used in some sensor systems, for example in potentiometry. Without protecting the electrode from direct exposure to organic viscous substances, it is impossible to obtain a reliable reproducible analytical signal. The methods proposed in the paper for the quantitative description of the stability of fluid flows are universal. In our opinion, they can characterize with sufficient accuracy the flow of an object over an extended time period with the use of new type of sensors – temporal percolation clusters, analytical signals in which can be eigenvalues and functions. Many works are devoted to the study of problems of hydrodynamic stability of fluid flow. The main goal of the numerical solution for given parameters of the unperturbed flow is the calculation of eigenvalues and functions. The main methods for solving this problem can be divided into the following classes: the class of finite-difference methods; a class of spectral methods that use expansion in terms of a complete system of orthogonal functions. The authors of this paper have written a program code in Fortran90 for solving the Cauchy problem by the finite difference method. The algorithm is used as a method for solving the eigenvalue problem. Finite difference methods are effective in finding the least stable eigenvalue and eigenfunctions. Spectral decomposition methods allow one to find the spectrum of eigenvalues, that is, to solve the fluid flows stability problem. In the present work, an estimate of the calculations relative error of the boundary value problem by finite-difference and spectral methods is carried out. Graphs of the number of signs of the relative calculation error for several eigenvalues are presented. The results of numerical calculations of ten eigenvalues for different point values for both methods are also given. In the case of the finite difference method, there is a mutual influence of the expansion components. It is shown that the accuracy of calculations by the spectral method is up to 14 decimal places. According to the results of numerical calculations, it can be concluded that the obtained accuracy of calculations is satisfactory.

**Keywords:** relative error, boundary value problem, finite difference method, spectral method, multisensory system.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at [bulletin\\_bsu@mail.ru](mailto:bulletin_bsu@mail.ru) if you need translation of the article.

1. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. Chislennyye metody [Numerical methods]. 3-e izd. M: BINOM, Laboratoriya znaniy, 2004. Pp. 321–636.
2. Boiko A. V., Grek G. R., Dovgal' A. V., Kozlov V. V. Fizicheskie mekhanizmy perekhoda k turbulentnosti v otkrytykh techeniyakh [Physical mechanisms of transition to turbulence in open flows]. M.; Izhevsk: In-t komp'yut. Issledovaniy, 2006.
3. Gol'dshtik M. A., Shtern V. N. Gidrodinamicheskaya ustoychivost' i turbulentnost' [Hydrodynamic stability and turbulence]. Novosibirsk: Nauka, 1977.
4. Darmaev T. G. Matematika, ee prilozheniya i matematicheskoe obrazovanie: Mat-ly Mezhdunar. konf. Pt. 1. Ulan-Ude, 2002. Pp. 156–160.
5. Neiman-zade M. I., Shkalikov A. A. Fundamental'naya i prikladnaya matematika. 2002. Vol. 8. No. 1. Pp. 301–305.
6. Skorokhodov S. L. Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. 2007. Vol. 47. No. 10. Pp. 1672–1691.
7. Tumanov S. N., Shkalikov A. A. Matem. zametki. 72:4. 2002. Pp. 561–569.
8. Shkalikov A. A. Trudy mezhdunarodnoi konferentsii po differentsial'nym i funktsional'no-differentsial'nym uravneniyam – satelita Mezhdunarodnogo kongressa matematikov ICM-2002 (M., MAI, 11–17 avgusta, 2002). Pt. 3. SMFN. 3. Moscow: MAI, 2003. Pp. 89–112.
9. Mack L. M. J. Fluid Mech. 1976. Vol. 73. No. 3. Pp. 497–520.
10. Melenk J. M., Kirchner N. P., Schwab C. Computing. 2000. Vol. 65. Pp. 97–118.
11. Orszag S. A. Journal of Fluid Mechanics. 1971. Vol. 50. Pp. 4. Pp. 689–703.
12. Thomas L. N. Phys. Rev. 1953. Vol. 90. Pp. 780–783.
13. Zhitnikov V. P., Sherykhalina N. M., Muksimova R. R. Sibirskii zhurnal vychislitel'noi matematiki. 2016. Vol. 19. No. 2. Pp. 139–152.
14. Nizamova A. D., Murtazina R. D., Kireev V. N., Urmancheev S. F. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 9. Pp. 2211–2215. DOI: 10.1134/S1995080221090249.
15. Nizamova A. D., Kireev V. N., Urmancheev S. F. Vestnik UGATU. 2021. Vol. 25. No. 4(94). Pp. 76–82. DOI: 10.54708/19926502\_2021\_2549476.
16. Nizamova A. D., Kireev V. N., Urmancheev S. F. Mnogofaznye sistemy. 2019. Vol. 14. No. 1. Pp. 52–58.
17. Sadrieva R. T., Sidel'nikova N. A., Murtazina R. D. Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2022. Vol. 27. No. 1. Pp. 18–24.
18. Kudasheva E. G., Murtazina R. D., Nizamova A. D., Sidel'nikova N. A. Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka. Ustoychivost' techeniya zhidkosti v kanale s lineinym profilem temperatury [Second order partial differential equations. Stability of fluid flow in a channel with a linear temperature profile]. Moscow: Rusains, 2021.
19. Sidel'nikov A. J. Chem. Chem. Eng. 2012. Vol. 6. Pp. 199–208.

*Received 14.02.2023.*