УДК 517.938
DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2023.2.3

БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ

© М. Г. Юмагулов*, Л. С. Ибрагимова, М. Кунгиров

Уфимский университет науки и технологий
Россия, Республика Башкортостан 450076, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел.: +7 (347) 229 96 32.
**Email: yum_mg@mail.ru*

В настоящей статье изучается задача о бифуркациях в двупараметрической нелинейной автономной системе с однородной нелинейностью. Показано, что в такой системе возможны различные сценарии бифуркаций. А именно, наряду с классической бифуркацией Андронова-Хопфа, также могут иметь место сценарии возникновения периодических решений, ответвляющихся от некоторого цикла линеаризованной системы, возникновение циклов больших амплитуд и др. Рассмотрены приложения к анализу динамики сложных нелинейных систем.

Ключевые слова: *автономная система, параметр, точка равновесия, бифуркация Андронова-Хопфа, однородность.*

1. Введение и постановка задачи

В теории нелинейных колебаний одной из наиболее интересных является задача о бифуркации Андронова-Хопфа – задача о возникновении нестационарных периодических колебаний малой амплитуды из сложного фокуса динамической системы. Вопросам изучения бифуркации Андронова–Хопфа посвящены многочисленные исследования (см., например, [1–7] и приведенную в них библиографию).

Классическая постановка задачи о бифуркации Андронова-Хопфа является однопараметрической, а сама бифуркация имеет коразмерность, равную единице. В то же время многие приложения приводят к многопараметрическим задачам, при этом коразмерность бифуркации может оказаться более двух. Исследование таких бифуркаций стало одним из популярных направлений в современной нелинейной динамике (см., например, [1–7]). В настоящей работе изучаются двупараметрические задачи, приводящие к бифуркациям коразмерности два. Работа развивает исследования, начатые в [8].

Рассматривается зависящее от двух вещественных параметров α и β нелинейное дифференциальное уравнение

$$x' = A(\alpha)x + \beta a_p(x), x \in R^n, n \geq 2, \qquad (1)$$

в котором $A(\alpha)$ – квадратная матрица порядка n , элементы которой непрерывно дифференцируемо зависят от α, а функция $a_p(x)$ является однородным вектор-полиномом порядка p , $p \geq 2$.

Пусть матрица $A(\alpha)$ при $\alpha = 0$ имеет простые собственные значения $\pm\omega_0 i, \omega_0 > 0$. Тогда при фиксированном β значение $\alpha = 0$ параметра α является точкой бифуркации Андронова–Хопфа для системы *(1):* существуют последовательности $\alpha_n \to 0$ и $T_n \to T_0 = 2\pi/\omega_0$ такие, что при каждом $\alpha = \alpha_n$ система *(1)* имеет нестационарное T_n – периодическое решение $x = x_n(t)$ такое, что $\max\limits_t \|x_n(t)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Решения $x = x_n(t)$ системы *(1)* будем называть *бифурцирующими*.

Указанный сценарий бифуркации Андронова-Хопфа имеет место при любом фиксированном значении параметра β. При $\beta = 0$ бифуркация является вырожденной, имеющей «взрывной» характер: периодические колебания малой (и, вообще, любой) амплитуды возникают при $\alpha = 0$ (т.к. при $\beta = 0$ система *(1)* линейна). Возникает естественный вопрос о динамике системы *(1)* при малых ненулевых значениях $|\alpha|$ и $|\beta|$.

В настоящей статье показано, что при определенных условиях в системе *(1),* наряду с бифуркацией Андронова-Хопфа, также могут иметь место сценарии возникновения периодических решений, ответвляющихся от некоторого цикла линеаризованной системы, и возникновение циклов больших амплитуд.

2. Основные понятия

Пусть $x = \varphi_0(t)$ - одно из ненулевых периодических решений линейной системы

$$x' = A_0 x , \qquad (2)$$

в котором $A_0 = A(0)$, и пусть Υ_0 – это соответствующий цикл в фазовом пространстве этой системы. Будем говорить, что значения $\alpha = \beta = 0$ являются *точкой бифуркации циклов системы (1), ответвляющихся от цикла* Υ_0, если существуют $\delta_0 > 0$ и $\delta_1 > 0$ такие, что выполняются условия:

а) при $\alpha \in (0, \delta_0)$ и $\beta \in (0, \delta_1)$ (и/или при $\alpha \in (-\delta_0, 0)$ и $\beta \in (-\delta_1, 0)$) система *(1)* имеет цикл $\Upsilon(\alpha, \beta)$, являющийся при ненулевых α и β изолированным;

б) цикл $\Upsilon(\alpha, \beta)$ непрерывно (в метрике Хаусдорфа) зависит от α и β, при этом $\Upsilon(0,0) = \Upsilon_0$.

Если в приведенных определениях вместо условия $\Upsilon(0,0) = \Upsilon_0$ потребовать, чтобы циклы $\Upsilon(\alpha,\beta)$ удовлетворяли соотношению $\min_{\alpha,\beta} \|\Upsilon(\alpha,\beta)\| \to \infty$ при α,β → 0, то будем говорить, что значение α = β = 0 является *точкой бифуркации циклов системы (1) на бесконечности*. Возникающие при этом циклы $\Upsilon(\alpha,\beta)$ будем называть *циклами больших амплитуд* системы *(1)*. Отметим, что различным вопросам исследования бифуркации периодических решений на бесконечности посвящены работы многих авторов (см., например, [6–12]).

3. Вспомогательные построения

Так как матрица A_0 имеет простые собственные значения $\pm\omega_0 i$, то найдутся ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in R^N$ такие, что выполняются равенства

$$A_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig), \qquad A_0^*(e^* + ig^*) = -i\omega_0(e^* + ig^*);$$

здесь A_0^* – транспонированная матрица.

Лемма 1. (см. [11]) *Векторы e, g, e^*, g^* можно нормировать в соответствии с равенствами*

$$(e,e^*) = (g,g^*) = 1, (e,g^*) = (g,e^*) = 0.$$

Ниже будем считать, что векторы e, g, e^*, g^* выбраны в соответствии с этими равенствами.

Положим

$$\gamma_1 = (A'e,e^*) + (A'g,g^*), \gamma_2 = (A',g^*) - (A'g,e^*);$$

здесь $A' = A'(0)$. Известно следующее утверждение (см. [11]).

Теорема 1. *Пусть матрица $A_0 = A(0)$ имеет простые собственные значения $\pm\omega_0 i, \omega_0 > 0$, и не имеет других чисто мнимых собственных значений. Пусть выполнено соотношение $\gamma_1 \neq 0$. Тогда при любом фиксированном β число $\alpha_0 = 0$ является точкой бифуркации Андронова–Хопфа уравнения (1).*

Наряду с системой *(1)* будем рассматривать также систему

$$y' = A(\alpha)y + a_p(y), y \in R^N. \tag{3}$$

Положим *q=1/(p-1)*. В дальнейших построениях важна следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть p – нечетно и $\beta > 0$. Тогда замена $y = \beta^q x$ переводит уравнение (1) в уравнение (3). Обратная замена переводит уравнение (3) в уравнение (1).*

Лемма 3. Пусть p – четно и β ≠ 0 . *Тогда замена $y = \beta^q x$ переводит уравнение (1) в уравнение (3). Обратная замена переводит уравнение (3) в уравнение (1).*

В настоящей статье ограничимся рассмотрением двух основных случаев порядка однородности нелинейности $a_p(x)$, когда $p = 2$ и $p = 3$. В связи с этим рассмотрим вспомогательную систему

$$y' = A(\alpha)y + a_2(y) + a_3(y), y \in R^N. \tag{4}$$

Пусть $\gamma_1 \neq 0$. Тогда в силу теоремы 1 для системы *(4)* значение $\alpha_0 = 0$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа. Качественные свойства этой бифуркации определяет следующее число (см. [8]):

$$\alpha_2 = -\frac{\omega_0}{\pi\gamma_1}(b_3, e^*), \tag{5}$$

в котором

$$b_3 = T_0\int_0^1 e^{(1-t)T_0A_0}f_3(t)dt,\ f_3(t) = a_3\big(e(t)\big) + F_2(t)\int_0^t e^{-sT_0A_0}a_2(e(s))ds,$$

$$F_2(t) = T_0 a_2{}'(e(t))e^{T_0A_0t}\int_0^t e^{-sT_0A_0}a_2(e(s))ds\,, e(t) = e\cos(2\pi t) - g\,sin(2\pi t)\ ;$$

здесь $a_2{}'(e(t))$ – матрица Якоби вектор-функции $a_2(y)$.

Из соответствующих утверждений работы [8] следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы 1 выполнено неравенство $\alpha_2 > 0$ ($\alpha_2 < 0$). Тогда при фиксированном β ≠ 0 бифурцирующие решения системы (1) возникают при $\alpha > 0$ (при $\alpha < 0$).*

Изучим теперь вопрос о динамике системы *(1)* при малых ненулевых значениях $|\alpha|$ и $|\beta|$. А именно, будем считать, что параметры α и β связаны одним из следующих равенств:

1) β = $m\alpha$; 2) β = $m\alpha^\gamma$ (γ>1) ; 3) β = $m\alpha^\gamma$ (0<γ<1) ;

при этом будем считать, что $m > 0$. Случай $m < 0$ рассматривается аналогично.

4. Основные результаты: случай $p = 3$

Пусть нелинейность $a_p(x)$ в системе *(1)* является кубической, т.е $p = 3$. Другими словами, рассмотрим систему

$$x' = A(\alpha)x + \beta a_3(x), x \in R^n, n \geq 2. \tag{6}$$

Пусть $\alpha_2 > 0$. Положим $\varphi_0(t) = e(t)/\sqrt{m\alpha_2}$. Эта функция является одним из периодических решений системы *(1)* при $\alpha = 0$ и β = 0; обозначим через Υ_0 соответствующий цикл.

Теорема 3. *Пусть $\alpha_2 > 0$. Пусть β = $m\alpha$. Тогда значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркации циклов системы (6), ответвляющихся от цикла Υ_0.*

Теорема 4. *Пусть* $\alpha_2 > 0$. *Пусть* $\beta = m\alpha^{\Upsilon}$ (γ>1). *Тогда значение* $\alpha = 0$ *является точкой бифуркации циклов системы (6) на бесконечности.*

Теорема 5. *Пусть* $\alpha_2 > 0$. *Пусть* $\beta = m\alpha^{\Upsilon}$ (0<γ<1). *Тогда значение* $\alpha = 0$ *является точкой бифуркации Андронова-Хопфа системы (6).*

5. Основные результаты: случай $p = 2$

Пусть нелинейность $a_p(x)$ в системе *(1)* является квадратичной, т.е $p = 2$. Другими словами, рассмотрим систему

$$x' = A(\alpha)x + \beta a_2(x), x \in R^n, n \geq 2. \qquad (7)$$

Положим $\varphi_0(t) = e(t)/m\sqrt{\alpha_2}$. Эта функция является одним из периодических решений системы *(1)* при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$; обозначим через Υ_0 соответствующий цикл.

Теорема 6. *Пусть* $\alpha_2 > 0$. *Пусть* $\beta = m\alpha^{\Upsilon}$ (γ=1/2). *Тогда значение* $\alpha = 0$ *является точкой бифуркации циклов системы (7), ответвляющихся от цикла* Υ_0.

Теорема 7. *Пусть* $\alpha_2 > 0$. *Пусть* $\beta = m\alpha^{\Upsilon}$ (γ>1/2). *Тогда значение* $\alpha = 0$ *является точкой бифуркации циклов системы (7) на бесконечности.*

Теорема 8. *Пусть* $\alpha_2 > 0$. *Пусть* $\beta = m\alpha^{\Upsilon}$ (0<γ<1/2). *Тогда значение* $\alpha = 0$ *является точкой бифуркации Андронова-Хопфа системы (7).*

Справедливость теорем 3–7 вытекает из теорем 1 и 2, а также из лемм 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kuznetsov Yu. A. Elements of Applied Bifurcation Theory. New York, 1998.
2. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. М.-Ижевск, 2009.
3. Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш. Н. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М., 2005.
4. Rachinskii D., Schneider K. Dynamic Hopf bifurcations generated by nonlinear terms // J. Differ. Equat. 2005. V. 210. P. 65–86.
5. Krasnosel'skii M. A., Mennicken R., Rachinskii D. I. Cycle stability for Hopf bifurcation, generated by sublinear terms // Mathematische Nachrichten. 2002. V. 235. P. 171–195.
6. Diamond P., Rachinskiy D. I., Yumagulov M. G. Stability of large cycles in a nonsmooth problem with Hopf bifurcation at infinity // Nonlinear Anal. 2000. V. 42. №6. P. 1017–1031.
7. Krasnosel'skii M. A., Rachinskii D. I. Hopf bifurcations from infinity, generated by bounded nonlinear terms // Funct. Differ. Equat. 1999. V. 6. №3–4. P. 357–374.
8. Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Имангулова Э. С. Главные асимптотики в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа и их приложения // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, №12. С. 1627–1642.
9. Красносельский М. А., Кузнецов Н. А., Юмагулов М. Г. Функционализация параметра и асимптотика циклов в бифуркации Хопфа // Автоматика и телемеханика. 1996. №11. С. 22–28.
10. Гусарова Н. И., Муртазина С. А., Фазлытдинов М. Ф., Юмагулов М. Г. Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10. №1. С. 25–49.
11. Вышинский А. А., Ибрагимова Л. С., Муртазина С. А., Юмагулов М. Г. Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2. №4. С. 3–26.
12. Кузнецов Н. А., Юмагулов М. Г., Шарафутдинов И. В. Алгоритм исследования устойчивости периодических колебаний в задаче о бифуркации Андронова–Хопфа // Автоматика и телемеханика. 2008. №12. С. 47–52.

Поступила в редакцию 23.05.2023 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2023.2.3

BIFURCATIONS OF PERIODIC SOLUTIONS IN TWO-PARAMETER AUTONOMOUS SYSTEMS

© M. G. Yumalulov*, L. S. Ibragimova, M. N. Kungirov

Ufa University of Science and Technology
Russia, Republic of Bashkortostan ,460076 Ufa, st. Zaki Validi, 32.

Phone/fax: + 7 (347) 229 96 32
**Email: yum_mg@mail.ru*

In this article, we study the problem of bifurcations in a two-parameter nonlinear autonomous system with a homogeneous nonlinearity. It is shown that various scenarios of bifurcations are possible in such a system. Namely, along with the classical Andronov-Hopf bifurcation, there can also be scenarios for the emergence of periodic solutions branching off from some cycle of a linearized system, the occurrence of cycles of large amplitudes, etc. Applications to the analysis of the dynamics of complex nonlinear systems are considered. In the theory of nonlinear oscillations, one of the most interesting is the Andronov-Hopf bifurcation problem – the problem of the occurrence of nonstationary periodic oscillations of small amplitude from a complex focus of a dynamical system. Numerous studies have been devoted to the study of the Andronov-Hopf bifurcation. The classical formulation of the Andronov-Hopf bifurcation problem is one-parametric, and the bifurcation itself has a codimension equal to one. At the same time, many applications lead to multiparametric problems, while the bifurcation co-dimension may be more than two. The study of such bifurcations has become one of the popular directions in modern nonlinear dynamics. In this paper, we study two-parameter problems leading to codimension two bifurcation.

Keywords: *autonomous system, parameter, equilibrium point, Andronov-Hopf bifurcation, homogeneity.*

Received 23.05.2023.