раздел **МАТЕМАТИКА и МЕХАНИКА**

УДК 517.9
DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2023.4.1

СИСТЕМЫ ТИПА «РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ»: ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ И БИФУРКАЦИЙ

© М. Г. Юмагулов, Н. А. Сидельникова*

Уфимский университет науки и технологий
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел: +7 (347) 229 96 32.
**Email: zhiber.na@gmail.ru*

В статье рассматриваются дифференциальные уравнения, возникающие при моделировании систем типа «реакция-диффузия». Изучаются вопросы об устойчивости точек равновесия в критических случаях, а также о бифуркациях в окрестностях таких точек. Определены условия, при выполнении которых точки равновесия системы устойчивы. Получены необходимые признаки бифуркаций, при выполнении которых возникающие бифуркационные решения могут быть устойчивыми. Обсуждаются основные сценарии бифуркационного поведения системы. Приводятся примеры, иллюстрирующие эффективность предложенных подходов в задачах исследования устойчивости и бифуркаций.

Ключевые слова: *система «реакция-диффузия», матрица диффузии, точка равновесия, периодическое решение, устойчивость, бифуркация, собственные значения, след матрицы, граничные условия, линейный оператор.*

1. Введение

Одной из наиболее интересных в нелинейной динамике и ее приложениях является модель «реакция-диффузия», к которой приводят многие задачи в системах различной природы: физических, химических, биологических и др. (см., например, [1] и имеющуюся там библиографию). Модели типа «реакция-диффузия» используются при описании возникновения и эволюции пространственно-временных структур в нелинейных средах различной природы. Классическими примерами являются уравнение Фишера-Колмогорова [1], описывающее динамику гена в популяции, а также модель Белоусова-Жаботинского [2], описывающая колебательные режимы определенного класса химических реакций.

Исследованию различных аспектов модели «реакция-диффузия» посвящены работы многих авторов (см., например, [1–2] и имеющуюся там библиографию). Здесь особый интерес представляют вопросы возникновения неравновесных пространственно-временных структур. К настоящему времени эти структуры экспериментально и численно изучены достаточно досконально. Однако систематическая теория, которая объяснила бы эти структуры и выявила условия их возникновения, еще только начинает строится. Одним из положений соответствующей теории могут послужить результаты исследований, направленных на получение признаков устойчивости стационарных режимов модели «реакция-диффузия» и признаков основных типов бифуркаций, приводящих к возникновению неравновесных пространственно-временных структур. Настоящая статья посвящена обсуждению некоторых задач в указанном направлении.

Рассматривается система «реакция- диффузия» (см., например, [1]), описываемая дифференциальным уравнением

$$\frac{dw}{dt} = K \cdot \Delta w + f(w), \tag{1}$$

где $w = w(x, y, t) = \begin{bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{bmatrix}$, $f(w)$ – гладкая (непрерывно дифференцируемая) функция, $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$ – матрица диффузии, $k_{ij} > 0$. Уравнение *(1)* изучается в квадрате $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ с граничными условиями Неймана

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Решением задачи *(1)–(2)* называют функцию $w = w(x, y, t)$, удовлетворяющая уравнению *(1)* и граничным условиям *(2).*

Особый интерес вызывают точки равновесия и периодические решения задачи *(1)–(2).* Точки равновесия – это постоянные (по t) решения задачи *(1)–(2).* Они являются решением задачи

$$K \cdot \Delta w + f(w) = 0, \tag{3}$$
$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Если точка равновесия $w = w(x, y)$ не зависит от x и y, т.е. $w = const$, то положение равновесия называют пространственно однородным, в противном случае – пространственно неоднородным.

Для отыскания пространственно неоднородных точек равновесия необходимо решать задачу *(3)*, что, как правило, является сложной задачей и допускает аналитическое решение только в исключительных случаях. Для отыскания пространственно однородных точек равновесия достаточно решить уравнение $\mathrm{f(w)} = 0$.

В п.6 приведен пример нахождения пространственно неоднородных положений системы *(1)*.

В настоящей работе изучаются вопросы об устойчивости точек равновесия, а также о бифуркациях в окрестностях таких точек. Основное внимание уделяется получению необходимых признаков бифуркаций, при выполнении которых возникающие бифуркационные решения могут быть устойчивыми.

2. Основные пространства и операторы

Приведем операторы и функциональные пространства, в которых будет изучаться система *(1)–(2)* (см. [1–3]).

Пусть $L_2(\Omega)$ – это гильбертово пространство вектор-функций w(x,y,t), определенных в квадрате Ω. Через $C(\Omega)$ и $C^2(\Omega)$ обозначим пространство непрерывных и пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на Ω соответственно.

Для $w = w(x, y, t) \in C^2(\Omega)$ определим норму по формуле

$$\|w\| = \left(\int_\Omega \sum\nolimits_{|\alpha|\le 2} \|D^\alpha u\|^2 \, dx\, dy\right)^{1/2}, \tag{4}$$

где D^α– оператор дифференцирования, задаваемый в следующем виде:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Далее введем в рассмотрение $W_2^2(\Omega)$ – соболевское пространство, являющееся пополнением пространства $C^2(\Omega)$ по норме *(3)*. Наконец, определим также множество

$$C_0^2(\Omega) = \left\{w \in C^2: \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0\right\}. \tag{5}$$

Известно, что оператор Лапласа $\Delta: C^2 \to \mathrm{C}$ может быть расширен до замкнутого самосопряженного оператора $\Delta_0: L_2 \to L_2$ с областью определения G, образованного замыканием в W_2^2 множества *(5)*. Область определения G оператора Δ_0 является банаховым пространством, если в ней ввести норму, определенную формулой *(4)*. Причем оператор Δ_0 является ограниченным в полученном пространстве. Линейный оператор $\Delta_0: W_2^2 \to W_2^2$ с областью определения G также будет ограниченным.

3. Исследование линеаризованной системы

Пусть система *(1)–(2)* имеет пространственно однородную точку равновесия $w = w^*$. Без ограничения общности можно считать, что $w^* = 0$. Тогда в окрестности точки равновесия $w^* = 0$ система *(1)–(2)* принимает вид

$$\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{K}\cdot\Delta\mathrm{w} + \mathrm{A}\cdot\mathrm{w} + \mathrm{h(w)}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7}$$

где $\|h(w)\| = O(\|w\|^2), \|w\| \to 0$, матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

Введем в рассмотрение семейство матриц

$$B_{nm} = A - (m^2 + n^2)K, m, n \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

и оператор

$$S = A + K\cdot\Delta_0 : W_2^2 \to W_2^2 . \tag{9}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Множество собственных значений оператора *(9)* совпадает с множеством собственных значений матрицы *(8)*.

Доказательство. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа $\Delta_0: W_2^2 \to W_2^2$ являются решениями задачи

$$\Delta_0 w(x, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \lambda w,$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

и, следовательно, эти собственные значения и собственные функции определяются по формулам

$$\lambda_{n,m} = -n^2 - m^2, w_{n,m} = \cos mx \cdot \cos ny, \text{ n, m=0,1,2,...} \tag{10}$$

Далее, собственные значения α_{nm} и собственные векторы $\begin{bmatrix} a_{nm} \\ b_{nm}\end{bmatrix}$ матрицы *(8)* определяются из уравнения

$$B_{nm}\cdot\begin{bmatrix} a_{nm} \\ b_{nm}\end{bmatrix} = \alpha_{nm}\cdot\begin{bmatrix} a_{nm} \\ b_{nm}\end{bmatrix}.$$

Тогда получим

$$S\begin{bmatrix}a_{nm}\\ b_{nm}\end{bmatrix}w_{nm} = (A + K\cdot\Delta_0)\cdot\begin{bmatrix}a_{nm}\\ b_{nm}\end{bmatrix}w_{nm} = A\cdot\begin{bmatrix}a_{nm}\\ b_{nm}\end{bmatrix}w_{nm} + K\ \cdot\begin{bmatrix}a_{nm}\\ b_{nm}\end{bmatrix}\Delta_0 w_{nm} =$$

$$= A\cdot\begin{bmatrix}a_{nm}\\ b_{nm}\end{bmatrix}w_{nm} + K\ \cdot\begin{bmatrix}a_{nm}\\ b_{nm}\end{bmatrix}(-n^2 - m^2)w_{nm} = (A + (-n^2 - m^2)K\ )\cdot\begin{bmatrix}a_{nm}\\ b_{nm}\end{bmatrix}w_{nm}\quad .$$

Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 вытекают следующие следствия.

Лемма 2. Собственные функции оператора Лапласа $\Delta_0 : W_2^2 \to W_2^2$ являются собственными функциями матрицы *(8).*

Лемма 3. Функция $w_{nm} = \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\cos mx\cdot\cos ny$ является собственной функцией оператора *(13),* если вектор $\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ является собственным вектором матрицы *(8).*

4. Признаки устойчивости точки равновесия

Известно, что (см. [3]) если все собственные значения оператора *(9)* имеют отрицательные вещественные части, то точка равновесия $w^* = 0$ системы *(1)-(2)* является асимптотически устойчивой. Если же хотя бы одно из собственных значений имеет положительную вещественную часть, то она неустойчива. Особый интерес вызывает случай, когда у оператора *(9)* имеются собственные значения с нулевой вещественной частью. Обсудим именно такой случай.

4.1 Вспомогательные утверждения

Приведем сначала вспомогательные утверждения, в справедливости которых можно убедиться прямым подсчетом.

Лемма 4. Собственные значения матрицы *(8)* являются решениями уравнения

$$\lambda^2 - \lambda\, trB_{nm} + \det B_{nm} = 0. \qquad (11)$$

Следствие 1. Матрица $B_{n_0m_0}$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$ тогда и только тогда, когда

$$trB_{n_0m_0} = 0, detB_{n_0m_0} > 0. \qquad (12).$$

Следствие 2. Матрица $B_{n_0m_0}$ имеет собственное значение $\lambda_1 = 0$ тогда и только тогда, когда

$$detB_{n_0m_0} = 0, \qquad (13)$$

при этом второе собственное значение определяется по формуле $\lambda_2 = trB_{n_0m_0}$.

Лемма 5. Имеет место равенство

$$trB_{nm} = trA - (m^2 + n^2)\cdot trK\ , n, m = 0,1,2, \ldots \qquad (14)$$

Лемма 6. Имеет место равенство

$$\det B_{nm} = detA + (m^2 + n^2)^2\cdot \mathrm{detK} + (m^2 + n^2)\cdot(tr(A\cdot K) - trA\cdot trK). \qquad (15)$$

4.2 Случай чисто мнимых собственных значений

Рассмотрим сначала случай, когда матрица $B_{n_0m_0}$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$.

Если $n_0 = m_0 = 0$, то $B_{00} = \mathrm{A}$ и $trA = 0, detA > 0$.

Тогда для остальных собственных значений матрицы B_{nm} из формулы *(14)* получаем, что

$$trB_{nm} = -(m^2 + n^2)\cdot trK<0, \text{ для любых } m^2 + n^2 \geq 1.$$

Далее, используем соотношение *(15),* будем предполагать, что

$$detA + (m^2 + n^2)^2\cdot \mathrm{detK} + (m^2 + n^2)\cdot(tr(A\cdot K) - trA\cdot trK) > 0,$$

для всех $m^2 + n^2 \geq 1$.

Тогда, согласно лемме 4, все собственные значения оператора S будут иметь отрицательные вещественные части.

Пусть теперь $m_0^2 + n_0^2 \geq 1$, т.е. матрица B_{nm} имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, причем

$$tr\mathrm{A} = -(m_0^2 + n_0^2)\cdot trK.$$

Но тогда $tr\mathrm{A} > 0$, так как $tr\mathrm{K} > 0$ и матрица B_{00} имеет собственные значения с положительными вещественными частями, что не представляет практического интереса, так как в этом случае точка равновесия $w^* = 0$ системы *(1)–(2)* будет неустойчивой.

4.3 Случай нулевого собственного значения

Пусть теперь матрица $B_{n_0m_0}$ имеет нулевое собственное значение $\lambda_1 = 0$.

Пусть при этом $n_0 = m_0 = 0$. Тогда матрица $B_{00} = \mathrm{A}$ имеет нулевое собственное значение, т.е. $detB_{00} = 0$ или det A = 0. В этом случае $\lambda_2 = trA$.

Пусть

$$trA < 0.$$

Тогда для остальных собственных значений матрицы B_{nm} имеем

$$trB_{nm} = trA - (m^2+n^2) \cdot trK < 0,$$
$$\det B_{nm} = detA + (m^2+n^2)^2 \cdot \mathrm{detK} + (m^2+n^2) \cdot (tr(A \cdot K) - trA \cdot trK).$$

Потребуем, чтобы $\det B_{nm} > 0$, для всех $m^2+n^2 \geq 1$.

Тогда все собственные значения оператора S будут иметь отрицательные вещественные части, за исключением $\lambda_1 = 0$.

Пусть теперь $m_0^2 + n_0^2 \geq 1$, т.е. матрица $B_{n_0m_0}$ имеет собственное значение $\lambda_1 = 0$. Тогда выполнено соотношение *(13):*

$$detA + (m_0^2+n_0^2)^2 \cdot \mathrm{detK} + (m_0^2+n_0^2) \cdot (tr(A \cdot K) - trA \cdot trK) = 0.$$

Полагаем, что

$$\lambda_2 = trB_{n_0m_0} < 0 \text{ или } trA < (m_0^2+n_0^2)\, trK.$$

Значит, если

$$trA > (m_0^2+n_0^2)\, trK \text{ или } detA < 0, \qquad (16)$$

то все собственные значения оператора S будут иметь положительные вещественные части. Следовательно, естественным будет предположение

$$trA < 0 \text{ и } detA > 0. \qquad (17)$$

Лемма 7. Пусть выполнены условия *(16)–(17)*, тогда при $m^2+n^2 > m_0^2+n_0^2$, имеет место $\det B_{nm} > 0$, $\mathrm{tr}\, B_{nm} < 0$.

Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $trA < (m^2+n^2) \cdot trK$ и $detA + (m^2+n^2)^2 \cdot \mathrm{detK} + (m^2+n^2) \cdot (tr(A \cdot K) - trA \cdot trK) > 0$ для всех m, n. Тогда точка равновесия $w^* = 0$ системы *(1)–(2)* является устойчивой.

5. Локальные бифуркации в окрестности точки равновесия

Из теории бифуркаций (см. [1, 3]) известно следует, что значение μ_0 будет бифуркационным для системы *(1)-(2)* в окрестности нулевой точки равновесия, если оператор $S(\mu_0)$ имеет собственные значения на мнимой оси. Основной интерес представляет случай, когда остальные собственные значения этого оператора имеют отрицательные вещественные части. Этот случай назовем основным.

Теорема 2. Пусть $trA = 0$, $detA > 0$ и $detA + (m^2+n^2)^2 \cdot \mathrm{detK} + (m^2+n^2) > 0$. Тогда μ_0 является точкой бифуркации Андронова-Хопфа системы *(1)–(2)*, при этом имеет место основной случай.

Теорема 3. Пусть $trA < 0$, $detA = 0$ и $detB_{nm} > 0$. Тогда μ_0 является точкой бифуркации кратного равновесия системы *(1)–(2)*, при этом имеет место основной случай.

Пример. Рассмотрим систему «реакция-диффузия» (см. [3])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = (\mu - 1)u + a^2 u + k_{11}\Delta u + k_{12}\Delta v + u^2 v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\mu u - a^2 v + k_{21}\Delta u + k_{22}\Delta v - u^2 v, \end{cases}$$

где $k_{ij} = k_{ij}(\mu) \geq 0, \Delta -$ оператор Лапласа. Данная система является системой типа *(1)*. Эту систему будем рассматривать в квадрате Ω с краевыми условиями Неймана *(2)*. Матрица $A = A(\mu)$ изучаемой системы имеет следующий вид

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} \mu - 1 & a^2 \\ -2\mu & -a^2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\mathrm{tr}\, A(\mu) = \mu - 1 - a^2$ и $\det \mathrm{A}(\mu) = a^2$, то при $\mu = \mu_0 = a^2 + 1$ для данной системы выполнены условия теоремы 2. Следовательно, значение $\mu = \mu_0 = a^2 + 1$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа для рассматриваемой системы, при этом имеет место основной случай.

6. Пример построения пространственно неоднородной точки равновесия

Рассмотрим систему *(1)* следующего вида:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - (au + bv), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ v_t = \Delta v - (cu + dv), \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = u_y\big|_{y=0} = u_y\big|_{y=1} = 0, \\ v_x|_{x=0} = v_x|_{x=1} = v_y\big|_{y=0} = v_y\big|_{y=1} = \cos \pi x, \end{cases} \qquad (18)$$

где a, b, c, d – положительные константы, причем a + b = c + d, a > b. Тогда пространственно определенная точка равновесия системы является решением следующей системы *(5):*

$$\begin{cases} \Delta u-(au+bv)=0\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ \Delta v-(cu+dv)=0,\\ u_x|_{x=0}=u_x|_{x=1}=u_y\big|_{y=0}=u_y\big|_{y=1}=0,\\ v_x|_{x=0}=v_x|_{x=1}=v_y\big|_{y=0}=v_y\big|_{y=1}=\cos\pi x\,. \end{cases} \quad (19)$$

В силу линейности уравнений, входящих в полученную систему, и условий, наложенных на константы a, b, c, d, мы можем свести ее при помощи замены (см. [5–7]).

$$z(x,y)=u(x,y)+\text{v}(\text{x, y})$$

к следующей задаче:

$$\begin{cases} \Delta z-\gamma z=0, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ z_x|_{x=0}=z_x|_{x=1}=0,\\ z_y\big|_{y=0}=0, z_y\big|_{y=1}=\cos\pi x\,, \end{cases} \quad (20)$$

где $\gamma=\text{a}+\text{b}+\text{c}+\text{d}$.

Решение задачи *(20)* находится в виде ряда Фурье (см. [8])

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(y)\cos\pi nx \quad (21)$$

по формуле

$$z(x,y)=\frac{ch(\sqrt{\gamma+\pi^2})y}{\sqrt{\gamma+\pi^2}\cdot sh(\sqrt{\gamma+\pi^2})}\cos\pi x\,,\gamma=\text{a}+\text{b}+\text{c}+\text{d}.$$

Затем, используя полученное решение системы *(20),* определяем, что

$$v(x,y)=z(x,y)\text{-u(x, y)=}\ z(x,y)\text{-}\ \frac{ch(\sqrt{\gamma+\pi^2 y})}{\sqrt{\gamma+\pi^2 y}\cdot sh(\sqrt{\gamma+\pi^2 y})}\cos\pi x\,,\gamma=\text{a}+\text{b}+\text{c}+\text{d}.$$

Далее подставляем данную формулу в первое уравнение системы *(19)* и будем иметь задачу для нахождения функции u(x, y)

$$\Delta u-(a-b)u=b\frac{ch\left(\sqrt{\gamma+\pi^2}\right)y}{\sqrt{\gamma+\pi^2}\cdot sh\left(\sqrt{\gamma+\pi^2}\right)}\cos\pi x\,, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,$$

$$u_x|_{x=0}=u_x|_{x=1}=u_y\big|_{y=0}=u_y\big|_{y=1}=0,$$

решение которой определяется в виде ряда Фурье *(21)* (см. [9]) по формуле

$$u(x,y)=b\frac{\alpha\cdot sh(\alpha)\cdot ch\left(\sqrt{\gamma+\pi^2}\right)y-\sqrt{\gamma+\pi^2}\cdot sh\left(\sqrt{\gamma+\pi^2}\right)\cdot ch(\alpha)y}{\alpha\cdot(\gamma-a+b)\sqrt{(\gamma+\pi^2)}\cdot sh\left(\sqrt{\gamma+\pi^2}\right)\cdot sh(\alpha)}\cos\pi x,$$

тогда

$$v(x,y)=z(x,y)-u(x,y)==\frac{(\gamma-a)\cdot\alpha\cdot sh(\alpha)\cdot ch\left(\sqrt{\gamma+\pi^2}\right)y-b\cdot\sqrt{\gamma+\pi^2}\cdot sh\left(\sqrt{\gamma+\pi^2}\right)\cdot ch(\alpha)y}{\alpha\cdot(\gamma-a+b)\sqrt{(\gamma+\pi^2)}\cdot sh\left(\sqrt{\gamma+\pi^2}\right)\cdot sh(\alpha)}\cos\pi x,$$

где $\alpha=\sqrt{\pi^2+a-b}$.

Заключение

В статье рассмотрены дифференциальные уравнения, возникающие при моделировании систем типа «реакция-диффузия». Получены следующие основные результаты. Во-первых, предложены новые признаки устойчивости точек равновесия в критических случаях, когда собственные значения соответствующих линеаризованных уравнений имеют чисто мнимые собственные значения. Во-вторых, предложены новые признаки основных типов бифуркаций в окрестностях точек равновесия, определены необходимые условия устойчивости возникающих бифуркационных решений. Эффективность предложенных подходов иллюстрируют соответствующие примеры. Полученные результаты могут быть полезными в задачах теоретического обоснования эффектов возникновения неравновесных пространственно-временных структур в нелинейных средах различной природы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. М.: Физматлит. 2010. 436 с.
2. Колебания и бегущие волны в химических системах / ред. Р. Филд и М. Бургер. М.: Мир, 1988. 328 с.
3. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных гиперболических уравнений. М.: Мир, 1965. 376 с.
4. Yumagulov M. G., Abushahmina G. R., Gusarova N. I. Lyapunov quantities for Andronov-Hopf bifurcation problem in reaction-diffusion system // Lobachevskii Journal of Mathemdtics 2021. Vol. 42. No 15. P. 3567–3573.
5. Сидельникова Н. А. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Учеб. пособие. Уфа: РИЦ БашГУ, 2020.
6. Сидельникова Н. А., Жибер А. В., Муртазина Р. Д., Дифференциальные уравнения гиперболического типа. Учебное пособие. Уфа: РИЦ БашГУ, 2021.

7. Кудашева Е. Г., Муртазина Р. Д., Низамова А. Д., Сидельникова Н. А. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Устойчивость течения жидкостей в канале с линейным профилем температуры. М.: Русайнс, 2021.
8. Сидельникова Н. А., Муртазина Р. Д., Нусратуллин Э. М. Канонические формы дифференциальных уравнений в частных производных механики и физики. М.: Русайнс, 2022.
9. Жибер А. В., Мухаметова Г. З., Сидельникова Н. А. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Учебное пособие. Уфа: РИЦ БашГУ, 2020.

Поступила в редакцию 04.12.2023 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2023.4.1

**SYSTEMS OF “REACTION-DIFFUSION” TYPE:
SIGNS OF STABILITY AND BIFURCATIONS**

© M. G. Yumagulov, N. A. Sidelnikova*

Ufa University of Science and Technology
32 Zaki Validi St., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (347) 229 96 32.
**Email: zhiber.na@gmail.ru*

The article discusses differential equations that arise when modeling reaction-diffusion systems. Questions about the stability of equilibrium points in critical cases, as well as about bifurcations in the vicinity of such points, are studied. The conditions under which the equilibrium points of the system are stable are determined. The necessary criteria for bifurcations are obtained, under which the resulting bifurcation solutions can be stable. The main scenarios for the bifurcation behavior of the system are discussed. Examples are given to illustrate the effectiveness of the proposed approaches in problems of studying stability and bifurcations.

Keywords: reaction-diffusion system, diffusion matrix, equilibrium point, periodic solution, stability, bifurcation, eigenvalues, matrix trace, boundary conditions, linear operator.

Received 04.12.2023 г.