УДК 517.538.2 + 517.984.26 + 517.547
DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2024.1.2

О ДЕЛИТЕЛЯХ В АЛГЕБРЕ БЕРНШТЕЙНА

© Н. Ф. Абузярова[1]*, Д. В. Семенова[1, 2], З. Ю. Фазуллин[3]

[1]*Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН*
Россия, Республика Башкортостан, 450008 г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

[2]*Уфимский государственный нефтяной технический университет*
Россия, Республика Башкортостан, 450064 г. Уфа, ул. Космонавтов, 1.

[3]*Уфимский университет науки и технологий*
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

**Email: abnatf@gmail.com*

Рассматриваются алгебра целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной прямой – алгебра Бернштейна. Доказан критерий принадлежности функции множеству делителей этой алгебры в терминах так называемого «медленного убывания». Аналогичные критерии известны для важных в приложениях алгебр Шварца и Берлинга-Бьорка. Также в работе описывается связь между множеством делителей алгебры Бернштейна и классом функций типа синуса.

Ключевые слова: *целая функция, алгебра Бернштейна, теорема деления, медленное убывание, функция типа синуса.*

Введение

Пусть $\nu\colon [0;\infty) \to [0;\infty)$ – неубывающая функция, $\nu(x) = o(x), x \to \infty$,

$P_{\nu,\sigma} = \left\{\psi \in H(\mathbb{C})\colon \|\psi\|_{\nu,n} \coloneqq \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} \frac{\psi(z)}{\exp\left(\sigma(|\operatorname{Im} z| + \nu(|\operatorname{Re} z|))\right)} < \infty\right\}, \sigma > 0,$ – банахово пространство целых функций.

Положим

$$\mathcal{P}_\nu = \liminf P_{\nu,n}\,, n \in \mathbb{N}.$$

Локально-выпуклое пространство $\mathcal{P}_\nu$ является также топологической алгеброй, при $\nu(x) \equiv 1$ совпадающей с *алгеброй Бернштейна* B_∞, при $\nu(x) = \ln(1+x)$ – с *алгеброй Шварца* $P_{(\ln),\infty}$.

Обе эти алгебры хорошо известны, также как и их роль в приложениях к различным задачам анализа. Более подробную информацию можно найти в работах [1–14].

Символом $D(\mathcal{P}_\nu)$ будем обозначать множество *делителей* алгебры $\mathcal{P}_\nu$, определяемое как совокупность всех функций $\varphi \in \mathcal{P}_\nu$ для которых справедлива импликация («теорема деления»):

$$F \in \mathcal{P}_\nu, \frac{F}{\varphi} \in H(\mathbb{C}) \Longrightarrow \frac{F}{\varphi} \in \mathcal{P}_\nu. \qquad (1)$$

Для целой функции ψ ее нулевое множество обозначаем символом $\mathcal{Z}_\psi$.

Настоящей работой мы дополним известные результаты о делителях в $\mathcal{P}_\nu$.

Речь пойдет о характеризации делителей ψ алгебры Бернштейна, имеющей форму ограничений на поведение функции $|\psi|$. Для алгебры Шварца, т.е. $\mathcal{P}_\nu$, определяемой функцией ν, равной $\ln(1+x)$, такие характеризации известны. А именно, в работе [1] установлен аналитический критерий того, что функция $\psi \in \mathcal{P}_\nu$ является делителем алгебры $\mathcal{P}_\nu$. Условие этого критерия имеет форму оценок снизу для $|\psi|$:

$$\psi \in D(\mathcal{P}_\nu) \Leftrightarrow \exists A > 0, x_0 > 0\colon \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x_0, \exists x' \in \mathbb{R}\colon \qquad (2)$$
$$|x - x'| \leq A\nu(|x|) \text{ и } \ln|\psi(x')| \geq -A\nu(|x'|).$$

Вместе с тем нам не удалось обнаружить в литературе никакой информации об описании делителей в алгебре Бернштейна, т.е. для веса $\nu = 1$.

Обозначим символом $\mathcal{S}$ класс *функций типа синуса*, состоящий, как хорошо известно (см., например, [2–4]), из целых функций φ экспоненциального типа, ограниченных на вещественной прямой, не равных нулю вне некоторой горизонтальной полосы и удовлетворяющих оценке снизу

$$|\varphi(x + id_0)| \geq c_\varphi$$

для некоторого $d_0 \in \mathbb{R}$ и всех $x \in \mathbb{R}$. Легко увидеть, что

$$\mathcal{S} \subset D(B_\infty) \subsetneq D\left(P_{(\ln),\infty}\right) \subsetneq D\left(P_{(\omega),\infty}\right),$$

причем включение $\mathcal{S} \subset D(B_\infty)$ является собственным; это следует из результатов работ А. М. Седлецкого (теоремы 2.3.1, 2.3.2 в [5], а также работа [6]). Однако, как будет показано ниже, функциями типа синуса исчерпываются все делители алгебры B_∞, мнимые части нулей которых ограничены. Для доказательства этого факта сначала мы устанавливаем аналитический критерий для произвольного делителя алгебры Бернштейна, аналогичный цитированному выше критерию для алгебры Шварца. Более точно, будут доказаны следующие утверждения.

Предложение 1. *Функция $\psi \in B_\infty$ является делителем этой алгебры тогда и только тогда, когда*

$$\exists A > 0, x_0 > 0: \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x_0, \exists x' \in \mathbb{R}: \\ |x - x'| \leq A \text{ и } \ln|\psi(x')| \geq -A. \tag{3}$$

Теорема 1. *Совокупность делителей ψ алгебры Бернштейна, удовлетворяющих условию*

$$\operatorname{Im} \lambda = O(1), |\lambda| \to \infty, \lambda \in \mathcal{Z}_\psi, \tag{4}$$

совпадает с классом $\mathcal{S}$ функций типа синуса.

Доказательство предложения 1

Достаточность.

Мы применим схему рассуждений, сходную с использованной в работе [1] и опирающуюся на теорему об оценке снизу модуля аналитической функции в круге:

Теорема А (см. [2]). *Пусть f – функция, аналитическая в круге $|z| \leq 2eR, f(0) = 1$. Тогда для любого $\eta > 0$ в круге $|z| \leq R$ найдется множество исключительных кружков $\{C_j\}$, сумма радиусов которых не превосходит ηR, такое, что всюду в круге $|z| \leq R$, но вне объединения кружков C_j справедлива оценка*

$$\ln|f(z)| > -H(\eta) \ln M_f(2eR)\,, H(\eta) = \ln\frac{15e^3}{\eta}, M_f(r) = \max_{|z|=r}|f(z)|. \tag{5}$$

Не ограничивая общности, можем считать, что

$$\ln|\psi(z)| \leq \sigma|\operatorname{Im} z|, z \in \mathbb{C}, \sigma \text{ тип функции } \psi. \tag{6}$$

Пусть функция $F \in B_\infty$ такова, что частное $\frac{F}{\psi}$ – целая функция и

$$\ln|F(z)| \leq \sigma_F|\operatorname{Im} z| + c_F, z \in \mathbb{C},$$

где σ_F – тип функции F, c_F – положительная постоянная.

Так как функция $\frac{F}{\psi}$ имеет конечный тип при порядке 1, требуемое включение $\frac{F}{\psi} \in B_\infty$ будет следовать из принципа Фрагмена-Линделефа и оценки

$$\left|\frac{F(x)}{\psi(x)}\right| \leq const, x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Докажем эту оценку. Для произвольной точки $x \in \mathbb{R}$ найдем точку x', удовлетворяющую *(3)*, и применим теорему А к функции $\frac{\psi}{\psi(x')}$ в круге $|z - x'| \leq R$ с $R = 2A$ и фиксированным $\eta \in (0; 1/4)$. Согласно этой теореме найдется окружность C_x с центром в точке x', радиус r_x которой удовлетворяет неравенствам

$$A < r_x \leq 2A,$$

такая, что

$$\ln|\psi(z)| \geq -A_1, z \in C_x,$$

при этом положительная постоянная не зависит от x. Из этой оценки и оценки сверху для $\ln|F(z)|$ следует, что

$$\ln\left|\frac{F(x)}{\psi(x)}\right| \leq 2A\sigma_F + c_F + A_1 =: A_2, z \in C_x.$$

Отсюда по принципу максимума выводим нужную оценку (7).

Необходимость.

Схема рассуждений сходна с примененной Л. Эренпрайсом в [1].

Прежде всего убедимся в справедливости импликации:

$$\psi \in D(B_\infty), M \subset B_\infty: \psi M \text{ – ограниченное множество} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow M \text{ – ограниченное множество.} \tag{8}$$

Как локально-выпуклое пространство B_∞ – строгий, а значит, и регулярный индуктивный предел, т.е. множество $A \subset B_\infty$ ограничено тогда и только тогда, когда для некоторого $\sigma > 0$ это множество содержится и ограничено в банаховом пространстве Бернштейна $B_\sigma := P_{1,\sigma}$.

Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$ таково, что множество ψM содержится и ограничено в пространстве B_{n_0}. Заметим, что $n_0 \geq \sigma_\psi$, если только M содержит ненулевые функции, здесь σ_ψ – тип функции ψ. Положим

$$\sigma_M = \sup\{\sigma_\varphi : \sigma_\varphi - \text{тип функции } \varphi \in M\}.$$

Так как ψ – функция вполне регулярного роста при порядке 1 (как и все элементы рассматриваемых в настоящей работе алгебр), по теореме о сложении индикаторов получим $\sigma_M \leq n_0 - \sigma_\psi$.

Рассмотрим оператор умножения на функцию ψ, действующий из банахова пространства $B_{n_0 - \sigma_\psi}$ в банахово пространство B_{n_0}. Нетрудно убедиться в том, что оно имеет замкнутый график, так что $\varphi \mapsto \psi\varphi$ – непрерывное отображение $B_{n_0 - \sigma_\psi}$ на $\psi B_{n_0 - \sigma_\psi}$, и следовательно, открыто. Поэтому если ψM ограниченно в B_{n_0}, то M ограниченно в $B_{n_0 - \sigma_\psi}$, а значит, и в B_∞.

Предположим, что для делителя ψ алгебры Бернштейна условие *(3)* не выполнено, то есть для некоторой последовательности точек $x_N \to \infty$ справедливы оценки

$$\ln|\psi(x)| \leq -N, \forall x: |x - x_N| \leq N, N \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

при этом $x_{N+1} > x_N + N$.

Определим функции

$$g_N(z) = \left(\frac{eN\sin(\pi z/N)}{\pi z}\right)^N. \qquad (10)$$

Легко увидеть, что каждая g_N – целая функция экспоненциального типа π и

$$g_N(x_N)| = e^N, g_N(x)| \le e^N, x \in \mathbb{R},$$

следовательно множество $M_0 = \{g_N : N \in \mathbb{N}\}$ содержится и не является ограниченным в B_∞.

С другой стороны, в силу *(9)*, будет

$$|\psi(x) g_N(x)| \le 1, x \in \mathbb{R},$$

и значит, ψM_0 – ограниченное множество в B_∞. Полученное противоречие с установленной выше импликацией *(8)* завершает доказательство.

Q.E.D.

Доказательство теоремы 1

Обозначим совокупность делителей алгебры Бернштейна, удовлетворяющих условию *(4)*, символом $D_1(B_\infty)$.

Включение $\mathcal{S} \subset D_1(B_\infty)$ очевидно. Докажем, что обратное тоже верно, т.е. любая функция $\psi \in D_1(B_\infty)$, нулевое множество которой удовлетворяет условию

$$\mathcal{Z}_\psi \subset \{z : |\operatorname{Im} z| \le H_\psi\}, \qquad (11)$$

где H_ψ – положительная постоянная, является функцией типа синуса.

Согласно предложению 1, для функции ψ имеют место оценки *(3)*.

Фиксируем произвольное $x \in \mathbb{R}$ и применим рассуждения, основанные на теореме D, аналогичные использованным нами при доказательстве предложения 1. А именно, теорему D об оценке снизу применим для круга $|z - x'| \le R$, где $R = \max\{2A, 2H_\psi\}$, с $\eta \in (0; 1/4)$, при этом точка x' определяется из условия *(3)*. Согласно этой теореме найдется окружность C_x с центром в точке x' радиуса $r_x \in [3R/4; R]$ такая, что $\ln|\psi(z)| \ge -A_1, z \in C_x$. Отсюда, учитывая *(11)* и определение величины R, нетрудно вывести, что для функции ψ выполнено определение функции типа синуса, цитированное во введении, то есть $\psi \in \mathcal{S}$.

Заключение

Таким образом, нами получен аналитический критерий для делителей алгебры Бернштейна и выяснена роль класса функций типа синуса в множестве делителей этой алгебры.

Исследование выполнено при поддержке Научно-образовательного математического центра ПФО (соглашение №075-02-2023-950).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ehrenpreis L. Solution of some problems of division, IV // Amer. Journal of Math. 1960. V. 57. P. 522–588.
2. Levin B. Y. (in collaboration with Yu. Lyubarskii, M. Sodin, V. Tkachenko). Lectures on entire functions (Rev. Edition). AMS. Providence. Rhode Island, 1996. 254 p.
3. Юхименко А. А. Об одном классе функций типа синуса // Матем. заметки. 2008. Т. 83. Вып. 6. С. 941–954.
4. Левин Б. Я., Островский И. В. О малых возмущениях множества корней функций типа синуса // Известия АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. №1. С. 87–110.
5. Седлецкий А. М. Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации, I // Совр. Матем. фунд. напр. 2003. Т. 5. С. 3–152.
6. Седлецкий А. М. Асимптотика нулей вырожденной гипергеометрической функции // Матем. заметки. 2007. Т. 82. №2. С. 262–271.
7. Левин Б. Я., Любарский Ю. И. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Известия АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. №3. С. 657–702.
8. Абузярова Н. Ф. Спектральный синтез для оператора дифференцирования в пространстве Шварца // Матем. заметки. 2017. Т. 102. №2. С. 163–177.
9. Абузярова Н. Ф. Сохранение классов целых функций, выделяемых ограничениями на рост вдоль вещественной оси, при возмущениях их нулей // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33. №4. С. 1–31.
10. Абузярова Н. Ф. Представление синтезируемых инвариантных относительно дифференцирования подпространств в пространстве Шварца // Доклады Академии наук. 2021. Т. 498. №1. С. 5–9.
11. Абузярова Н. Ф. Об условии представления инвариантного относительно дифференцирования подпространства в пространстве Шварца в виде прямой суммы его резидуальной и экспоненциальной составляющих // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13. №4. С. 3–7.
12. Abuzyarova N. F. On properties of functions invertible in the sense of Ehrenpreis in the Schwartz algebra // Eurasian mathematical journal. 2022. V. 13. №1. P. 9–18.
13. Абузярова Н. Ф. Представление инвариантных подпространств в пространстве Шварца // Математический сборник. 2022. Т. 213. №8. С. 3–25.
14. Berenstein C. A., Taylor B. A. A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Advances in Mathematics. 1980. V. 33. P. 109–143.

Поступила в редакцию 06.03.2024 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2024.1.2

ON DIVISORS IN THE BERNSTEIN ALGEBRA

© N. F. Abuzyarova[1*], D. V. Semenova[1,2], Z. Yu. Fazullin[3]

[1]Institute of Mathematics with Computational Center, Ufa Federal Research Center of RAS
112 Chernyshevsky St., 450008 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

[2]Ufa State Petroleum Technological University
1 Kosmonavtov St., 450064 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

[3]Ufa University of Science and Technology
32 Zaki Validi St., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

**Email: abnatf@gmail.com*

We consider an algebra of entire functions of exponential type that are bounded on the real line. It is called Bernstein algebra. The criterion for a function to be a divisor of this algebra is obtained. We formulate the criterion in terms of so-called “slow decrease”. For the Schwartz algebra and Beurling-Bjorck algebra similar criteria are known. We also investigate the connections between the set of divisors of the Bernstein algebra and class of sine-type functions.

Keywords: entire function, Bernstein algebra, division theorem, slowly decreasing function, sine-type function.