

раздел МАТЕМАТИКА и МЕХАНИКА

УДК 534.26

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2024.3.1

**ИЗМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ
ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЙЯНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ
АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ СО ЗВУКОПРОНИЦАЕМЫМИ СФЕРАМИ**

© Э. Ш. Насибуллаева

*Институт механики им. Р. Р. Мавлютова, УФИЦ РАН
Россия, Республика Башкортостан, 450054 г. Уфа, пр. Октября, 71.**Email: elvira@anrb.ru*

В настоящей работе представлены результаты исследования, проведенного в рамках решения задачи рассеяния сферической волны от монопольного источника излучения на системе звукопроницаемых сфер, расположенных в трехмерном пространстве. Основная цель: определение чувствительности отклика системы на изменение исходных данных (радиуса сфер и декартовых координат их центров) при различных соотношениях физических параметров сферы и окружающей среды (плотность и скорость звука) для двух различных типов конфигурации системы. Решение поставленной задачи получено с помощью обобщенной методики расчета, основанной на быстром методе мультиполей, путем проведения серии вычислительных экспериментов. Показано, что во всех рассмотренных случаях система является сильно чувствительной к малому случайному изменению начальных данных, при этом тип конфигурации и соотношения физических параметров среды внутри сфер и внешней среды являются существенными факторами.

Ключевые слова: акустическое рассеяние, система звукопроницаемых сфер, монопольный источник излучения, полное сечение рассеяния, вычислительный эксперимент, средне-квадратичное отклонение, отклик системы.

Введение

Понимание фундаментальной природы рассеяния акустической волны на множестве препятствий малых размеров является одной из важнейших задач акустики. Обзор основных результатов исследований по акустическому рассеянию на системе, состоящей более чем из одной сферы, представлены в работе [1]. При изучении систем с большим числом сфер одной из актуальных подзадач становится изучение механизма взаимодействия частиц в подобных системах, в том числе анализ чувствительности отклика всей системы на изменение исходных данных.

В рамках настоящего исследования представлены результаты по изучению рассеяния сферической волны от монопольного источника излучения на системе звукопроницаемых сфер, расположенных в трехмерном пространстве в различных конфигурациях. В работе [2] при определении параметров, при которых слой капелек является чувствительным к изменению радиуса капелек, получено, что система наиболее чувствительна к изменению данного параметра в случае, когда упругость вещества внутри капли меньше, чем у внешней среды, а при увеличении числа сфер в плотных конфигурациях, – когда упругость вещества внутри капли много больше, чем у внешней среды. Кроме того, чувствительность к изменению исходных данных падает с увеличением расстояния между центрами сфер, т.е. с уменьшением плотности расположения сфер в конфигурации.

В настоящей работе продолжены исследования с целью определения чувствительности отклика системы на изменение исходных данных (радиуса сфер и декартовых координат их центров) при различных соотношениях физических параметров сферы и окружающей среды (плотность и скорость звука) для двух различных типов конфигурации системы.

Постановка задачи и основные уравнения

Исследуется рассеяние сферической волны от монопольного источника излучения, расположенного в точке M_s с радиус-вектором $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$, на системе N сфер различных радиусов a_v , центры которых имеют радиус-вектора $\mathbf{r}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$ ($v = 1, 2, \dots, N$), в бесконечном трехмерном пространстве, заполненном однородной средой, имеющей плотность ρ_0 и скорость звука c_0 . Предполагается, что центры сфер неподвижны, радиальное движение сферической поверхности отсутствует, а через поверхность сфер проходит волна, которая распространяется в другой среде, имеющей плотность ρ_v и скорость звука c_v .

Рассматриваются два «базовых» типа конфигураций системы звукопроницаемых сфер одинакового радиуса:

K1 – плоская конфигурация – слой, состоящий из $N = N_y \times N_z$ сфер, где N_y частиц расположены вдоль оси Oy и N_z – вдоль оси Oz , с центрами в узлах правильной сетки в плоскости Oyz с наименьшими расстояниями между узлами равными $\delta l_y = \delta l_z \equiv \delta l$ (см. рис. 1(а));

K2 – объемная конфигурация с $N = 3 \times N_y \times N_z$ сферами, в которой частицы в каждом слое имеют расположение, как в конфигурации K1, при этом центральный слой находится в плоскости Oyz , а остальные два – симметрично относительно центрального на расстоянии $\delta l_x \equiv \delta l$ (см. рис. 1(б)).

Для исследования чувствительности системы к изменению исходных данных в дальнейшем в данных конфигурациях будет задаваться малые отклонения радиусов и центров всех сфер от «базовых» значений.

Задача акустического рассеяния на множестве звукопроницаемых сфер сводится к решению уравнений Гельмгольца в произвольной точке пространства M с радиус-вектором $\mathbf{r} = (x, y, z)$ для комплексных потенциалов $\Psi(\mathbf{r})$ внешней среды и $\Psi_{\text{int}}^{(v)}$ среды в v -й сфере [3–4]:

$$\nabla^2 \Psi + k_0^2 \Psi = 0, \nabla^2 \Psi_{\text{int}}^{(v)} + k_v^2 \Psi_{\text{int}}^{(v)} = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности v -й сферы:

$$(\Psi(\mathbf{r}) - \Psi_{\text{int}}^{(v)})|_{r=a_v} = 0, \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial \Psi_{\text{int}}^{(v)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a_v} = 0, v = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь k_0 – волновое число для внешней среды; k_v – волновое число внутри v -й сферы.

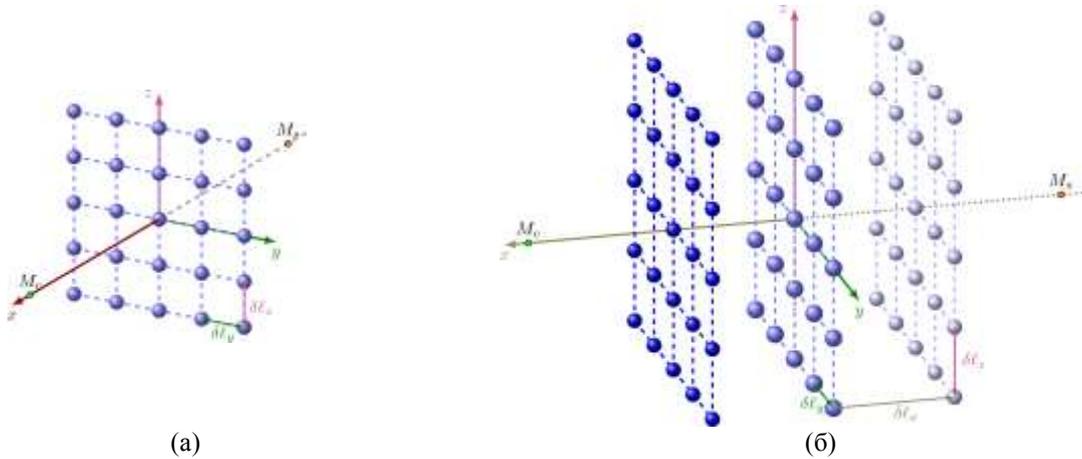


Рис. 1. «Базовые» типы конфигураций систем звукопроницаемых сфер:
(а) K1 – плоская (однослойная) конфигурация для $N = 5 \times 5 = 25$ сфер;
(б) K2 – объемная (трехслойная) конфигурация для $N = 3 \times 5 \times 5 = 75$ сфер.
 M_s – монополюсный источник излучения, M_c – расчетная точка.

Потенциал внешнего поля представляется как [5–6]

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \Psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}),$$

где $\Psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$ – потенциал падающего поля, который в случае монополюсного источника излучения определяется по формуле

$$\Psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = -V_0 \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|};$$

V_0 – производительность монополюсного источника излучения; $\Psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$ – потенциал поля рассеяния, удовлетворяющий условию излучения Зоммерфельда [7], задающему затухание волны на бесконечности, и представляющийся в следующем виде [5]:

$$\Psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \sum_{v=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^{(v)m} S_n^m(\mathbf{r}_v).$$

Здесь $\mathbf{r}_v = (r_v, \theta_v, \varphi_v) = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_v$, т.е. осуществлен переход к сферической системе координат, связанной с центром v -й сферы; $A_n^{(v)m}$ – коэффициенты разложения по мультиполям; $S_n^m(\mathbf{r}_v) = h_n(k_0 r_v) Y_n^m(\theta_v, \varphi_v)$ – мультиполь порядка n и степени m ; $h_n(z)$ – сферические функции Ханкеля 1-го типа; $Y_n^m(\theta_v, \varphi_v)$ – ортогональные сферические гармоники [8]. В соответствии с методом повторного разложения по мультиполям [5–6] решение (1), (2) сводится к определению коэффициентов $A_n^{(v)m}$ из решения системы линейных уравнений, которая для рассматриваемой задачи записывается в следующем матричном виде [4]:

$$LA = D, \quad (3)$$

с матрицей и векторами, скомпонованными следующим образом:

$$A = \{A_u\} = (A^{(1)}, \dots, A^{(N)}) = \left(\left\{ A_l^{(1)s} \right\}^T, \dots, \left\{ A_l^{(N)s} \right\}^T \right)^T,$$

$$D = \{D_t\} = (D^{(1)}, \dots, D^{(N)}) = \left(\left\{ D_n^{(1)m} \right\}^T, \dots, \left\{ D_n^{(N)m} \right\}^T \right)^T,$$

$$L = \{L_{u_0 t_0}\} = \begin{pmatrix} L^{(11)} & L^{(12)} & \dots & L^{(1N)} \\ L^{(21)} & L^{(22)} & \dots & L^{(2N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L^{(N1)} & L^{(N2)} & \dots & L^{(NN)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\{ L_{u_1 t_1}^{(11)} \right\} & \left\{ L_{u_1 t_1}^{(12)} \right\} & \dots & \left\{ L_{u_1 t_1}^{(1N)} \right\} \\ \left\{ L_{u_1 t_1}^{(21)} \right\} & \left\{ L_{u_1 t_1}^{(22)} \right\} & \dots & \left\{ L_{u_1 t_1}^{(2N)} \right\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\{ L_{u_1 t_1}^{(N1)} \right\} & \left\{ L_{u_1 t_1}^{(N2)} \right\} & \dots & \left\{ L_{u_1 t_1}^{(NN)} \right\} \end{pmatrix},$$

$$A_{u_0} = A_l^{(v)s}; \quad D_{t_0} = D_n^{(w)m} = -\frac{j_n(k_0 a_w) j'_n(k_w a_w) - \kappa_w j'_n(k_0 a_w) j_n(k_w a_w)}{h_n(k_0 a_w) j'_n(k_w a_w) - \kappa_w h'_n(k_0 a_w) j_n(k_w a_w)} C_{in,n}^m(r'_w),$$

$$L_{u_0 t_0} = L_{u_1 t_1}^{(vw)} = \begin{cases} \frac{j_l(k_0 a_w) j'_l(k_w a_w) - \kappa_w j'_l(k_0 a_w) j_l(k_w a_w)}{h_l(k_0 a_w) j'_l(k_w a_w) - \kappa_w h'_l(k_0 a_w) j_l(k_w a_w)} (S|R)_{ln}^{sm}(r'_{vw}) \text{ для } v \neq w, \\ \delta_{u_1 t_1} \text{ для } v = w, \end{cases}$$

$$u_0 = (v-1)(n_{tr}+1)^2 + (l+1)^2 - (l-s); \quad u_1 = (l+1)^2 - (l-s);$$

$$t_0 = (w-1)(n_{tr}+1)^2 + (n+1)^2 - (n-m); \quad t_1 = (n+1)^2 - (n-m);$$

$$l = 0, 1, \dots, n_{tr}; \quad s = -l, \dots, l; \quad n = 0, 1, \dots, n_{tr}; \quad m = -n, \dots, n; \quad v, w = 1, \dots, N.$$

Здесь $j_n(z)$ и $j'_n(z)$ – сферические функции Бесселя 1-го типа и их производные [8]; $\kappa_w = (k_0 \rho_w)/(k_w \rho_0)$ – введенный параметр; $C_{in,n}^m(r'_w)$ – коэффициенты разложения потенциала падающего поля ψ_{in} около $r = r'_w$; $(S|R)_{ln}^{sm}(r'_{vw})$ – коэффициенты перехода при повторном разложении по мультиполям [5]; $\delta_{u_1 t_1}$ – символ Кронекера; n_{tr} – число усечения рядов при разложении.

Явная формула для основной характеристики данного явления – полного сечения рассеяния, – учитывающая взаимодействие между сферами в системе в общем случае, имеет следующий вид [9]:

$$\sigma_s = \frac{\omega \rho_0}{2k_0 I_0} \left(\sum_{v=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |A_n^{(v)m}|^2 + \operatorname{Re} \left(\sum_{\substack{v,w=1 \\ v \neq w}}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l (-1)^{n+m} i^{n+l} \times \right. \right. \quad (4)$$

$$\times A_n^{(v)m} (A_l^{(w)s})^* \sqrt{(2n+1)(2l+1)} \frac{(n-|m|)!(l-|s|)!}{(n+|m|)!(l+|s|)!} c_{m,s} e^{i(m-s)\varphi_{vw}} \times$$

$$\left. \left. \times \sum_{i_1=|n-l}^{n+l} b_{i_1}^{(nm ls)} i^{i_1} j_{i_1}(k_0 r'_{vw}) P_{i_1}^{m-s}(\cos \theta_{vw}) \right) \right).$$

Данная формула применима для любого числа сфер различных радиусов, расположенных в трехмерном пространстве произвольным образом, и для произвольного внешнего воздействия в рамках применимости алгоритма [4]. В формуле (4) коэффициенты $c_{m,s}$ определяются следующим выражением:

$$c_{m,s} = \begin{cases} 1, \text{ для } m \geq 0 \text{ и } s \geq 0; \\ (-1)^{-|m|} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}, \text{ для } m < 0 \text{ и } s \geq 0; \\ (-1)^{-|s|} \frac{(l+|s|)!}{(l-|s|)!}, \text{ для } m \geq 0 \text{ и } s < 0; \\ (-1)^{-|m|-|s|} \frac{(n+|m|)!(l+|s|)!}{(n-|m|)!(l-|s|)!}, \text{ для } m < 0 \text{ и } s < 0; \end{cases}$$

$b_{i_1}^{(nm ls)}$ – коэффициенты Клебша-Гордана, значения которых определяются по следующей формуле [10]:

$$b_{i_1}^{(nm ls)} = (-1)^s \left\{ \frac{(n+m)!(l+s)!(i_1-m+s)!}{(n-m)!(l-s)!(i_1+m-s)!} \right\} (nl00|i_1 0)(nlm, -s|i_1, m-s),$$

записанной с помощью введенного символа:

$$\begin{aligned}
(nlms|i_1, m+s) &= \\
&= \left\{ \frac{2i_1+1}{(i_2+1)!} (i_2-2n)! (i_2-2l)! (i_2-2i_1)! (n-m)! (n+m)! \times \right. \\
&\quad \left. \times (l+s)! (l-s)! (i_1+m+s)! (i_1-m-s)! \right\}^{1/2} \times \\
&\quad \times \sum_{i_3} (-1)^{i_3} \{i_3! (n+l-i_1-i_3)! (i_3+i_1-n-s)! (l+s-i_3)! \times \\
&\quad \times (i_3+i_1-l+m)! (n-mi_3)! \}^{-1}, \quad \text{где } i_2 = n+l+i_1,
\end{aligned}$$

$$i_3: \begin{cases} i_3 \geq 0, i_3 \geq s+l-i_1, i_3 \leq n-m, \\ i_3 \leq n+l-i_1, i_3 \leq l+s, i_3 \leq n-m, \end{cases}$$

i_2 – нечетное: $(nl00|i_1 0) = 0$,

i_2 – четное: $(nl00|i_1 0) =$

$$= (-1)^{r+i_2/2} \frac{(i_2/2)!}{(i_2/2)! (i_2/2-l)! (i_2/2-i_1)!} \left\{ \frac{(2i_1+1)! (i_2-2n)! (i_2-2l)! (i_2-2i_1)!}{(i_2+1)!} \right\}^{1/2};$$

$P_n^m(\mu)$ – присоединенные функции Лежандра [8]; I_0 – интенсивность падающей сферической волны от монополюсного источника излучения, для системы сфер определяющаяся по формуле

$$I_0 = \frac{\omega \rho_0 V_0^2 k_0}{32\pi^2 d_{M_s}^2};$$

$\omega = 2\pi f$ – угловая частота; f – частота внешнего поля; V_0 – производительность монополюсного источника излучения; d_{M_s} – расстояние от монополюсного источника M_s до геометрического центра системы сфер.

Результаты вычислительного эксперимента

При численной реализации техники разложения по мультиполям был разработан программный код на языке программирования Fortran 90 (GCC) в среде MSYS2 (MinGW-w64) с подключением библиотеки LAPACK [11]. Численный анализ проведен в рамках вычислительного эксперимента, в котором изучалось влияние исходных факторов (радиус сфер a_i и декартовы координаты центров сфер (x_i, y_i, z_i)) на значение двух искомых функций:

– модуль нормированного давления $H = |p/p_{in}|$ в расчетной точке M_c , симметричной монополюсному источнику излучения M_s относительно системы сфер (см. рис. 1);

– нормированное полное сечение рассеяния $\sigma_s/(\pi a^2)$.

Для этого a_i, x_i, y_i и z_i ($i = 1, \dots, N$) задавались случайным образом в пределах заданного отклонения Δ от первоначальных (невозмущенных) значения a, x_{0i}, y_{0i} и z_{0i} следующим образом. При отклонении в 5% величина Δ задавалась равной $\Delta = 0.005$, тогда при численной реализации в программном коде случайное отклонение параметров для сфер определялось как

$$\begin{aligned}
a_i &= a(1 + 2\Delta(\delta_{1,i} - 0.5)), \quad x_i = x_{0i}(1 + 2\Delta(\delta_{2,i} - 0.5)), \\
y_i &= y_{0i}(1 + 2\Delta(\delta_{3,i} - 0.5)), \quad z_i = z_{0i}(1 + 2\Delta(\delta_{4,i} - 0.5)),
\end{aligned}$$

где $\delta_{j,i}$ ($j = 1, 2, 3, 4; i = 1, \dots, N$) – случайные величины, определяемые в диапазоне от 0 и 1 встроенной подпрограммой Fortran 90 `random_number`($\delta_{j,i}$). Отметим, что для инициализации генератора случайных чисел необходимо предварительно запустить подпрограмму `random_seed`.

Монополюсный источник излучения располагается на оси Ox на расстоянии $10a$ до центра ближайшей сферы, т.е. координаты M_s для конфигурации K1 равны $(-10a, 0, 0)$, а для K2 – $(-10a - \delta l, 0, 0)$; расчетная точка M_c располагается на оси Ox симметрично точке M_s относительно начала координат (см. рис. 1). Рассмотрены физические параметры сред, соответствующие каплям воды ($\rho = 998 \text{ кг/м}^3, c = 1484 \text{ м/с}$) в воздухе ($\rho = 1.205 \text{ кг/м}^3, c = 343,1 \text{ м/с}$), каплям воды в дихлорэтане ($\rho = 1252.8 \text{ кг/м}^3, c = 1034 \text{ м/с}$) и каплям дихлорэтана в воде.

Отметим, что поскольку связь между акустическим давлением и потенциалом определяется формулой

$$p = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\omega \rho_0 \Psi,$$

то после определения потенциала Ψ с помощью системы уравнений (3) можно найти и значение давления p .

Заметим также, что в работе [12] были определены соотношения физических параметров сферы и окружающей среды для заданных типов конфигурации системы, при которых эффекты многократного рассеяния при вычислении полного сечения рассеяния являются существенными. В вычислительном эксперименте рассматривались именно такие параметры, поэтому при вычислении значения σ_s применяется полная формула (4).

На рис. 2, 3 представлены изменения модуля нормированного давления H в расчетной точке M_c и нормированного полного сечения рассеяния $\sigma_s/(\pi a^2)$ в зависимости от волнового радиуса $k_0 a$ при невозмущенных радиусах сфер a и их центрах (x_i, y_i, z_i) (сплошные линии), а также при случайных отклонениях данных параметров от их невозмущенных величин в пределах 5% (штриховые линии) для конфигураций K1 (рис. 2) и K2 (рис. 3) и значений минимального расстояния между центрами соседних сфер равном $\delta l = 3a$. На данных рисунках видно, что во всех рассмотренных случаях система чувствительна к малому изменению параметров.

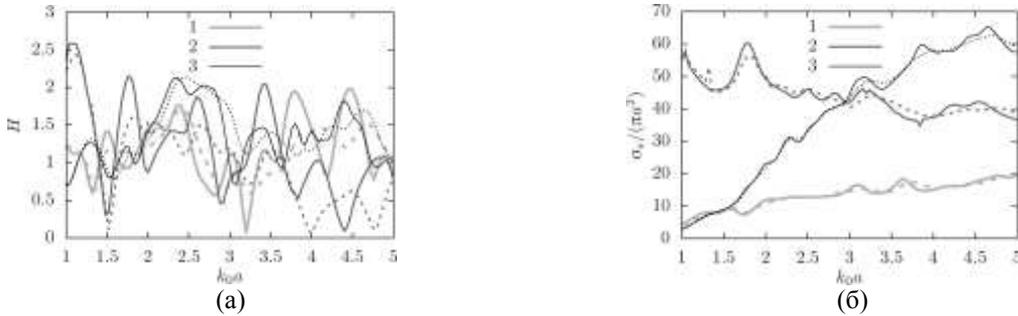


Рис. 2. Зависимость искомых функций f от волнового радиуса $k_0 a$ для конфигурации K1 с $N = 5 \times 5$ сфер: (а) $f \equiv H$; (б) $f \equiv \sigma_s/(\pi a^2)$. 1 – капли воды в воздухе; 2 – воздушные пузырьки в воде; 3 – капли дихлорэтана в воде. Сплошные линии – значения функций при невозмущенных параметрах; штриховые линии соответствующей толщины – значения этих же функций при случайном малом отклонении параметров.

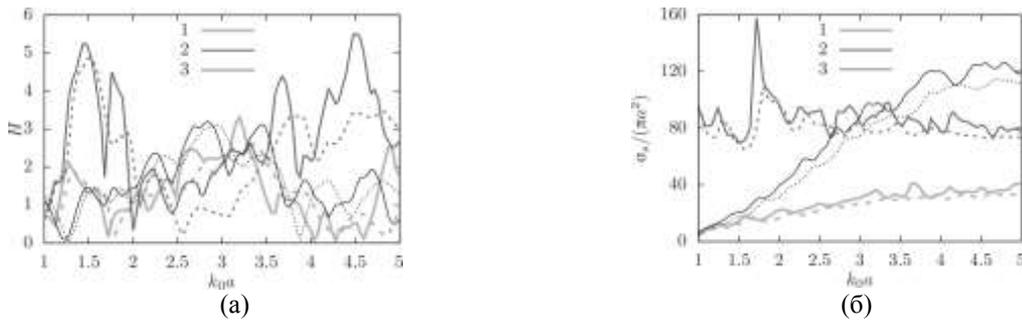


Рис. 3. Зависимость искомых функций f от волнового радиуса $k_0 a$ для конфигурации K2 с $N = 3 \times 5 \times 5$ сфер: (а) $f \equiv H$; (б) $f \equiv \sigma_s/(\pi a^2)$. 1 – капли воды в воздухе; 2 – воздушные пузырьки в воде; 3 – капли дихлорэтана в воде. Сплошные линии – значения функций при невозмущенных параметрах; штриховые линии соответствующей толщины – значения этих же функций при случайном малом отклонении параметров.

Для оценки чувствительности отклика системы на относительное изменение исходных данных были рассчитаны среднеквадратические отклонения отдельно для каждого из возмущенных параметров $\zeta \equiv a, x, y, z$:

$$D_\zeta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\zeta_i - \zeta_{0i})^2}{N}},$$

для всех параметров

$$D_{\text{all}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N ((a - a_{0i})^2 + (x_i - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2 + (z_i - z_{0i})^2)}{4N}}$$

и для искомых функций $f \equiv |p/p_{\text{in}}|, \sigma_s$:

$$D_f = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^n (f_j - \tilde{f}_j)^2}{n + 1}}$$

при шаге по $k_0 a$ равном $\Delta h(k_0 a) = 0.04$, разбивающем отрезок $k_0 a = [1.5]$ на n частей. Здесь f_j и \tilde{f}_j – невозмущенное и возмущенное значения функции f в точке $(k_0 a)_j$. Также была рассчитана максимальное значение относительной погрешности искомых функций:

$$\delta_{\text{max},f} = \max_j \left| \frac{f_j - \tilde{f}_j}{f_j} \right| \cdot 100 \%$$

Таблица 1

Среднеквадратичные отклонения D_ζ для возмущенных параметров $\zeta \equiv a, x, y, z$ и для всего множества параметров при $\zeta \equiv \text{all}$ для двух типов конфигурации системы

| Конфигурации | D_a | D_x | D_y | D_z | D_{all} |
|--------------|--------|--------|--------|--------|------------------|
| K1 | 0.0295 | 0.0283 | 0.0276 | 0.0356 | 0.0304 |
| K2 | 0.0262 | 0.0277 | 0.0297 | 0.0275 | 0.0278 |

Таблица 2

Среднеквадратичные отклонения D_f и максимальное значение относительной погрешности $\delta_{\text{max},f}$ для двух искомым функций ($f \equiv H, \sigma_s$), двух типов конфигурации системы и трех случаев соотношений физических параметров вне и внутри сфер

| Вид сред вне и внутри сфер | Расчетный параметр | K1 | | K2 | |
|----------------------------|-----------------------------|--------------|---------------------|--------------|---------------------|
| | | $f \equiv H$ | $f \equiv \sigma_s$ | $f \equiv H$ | $f \equiv \sigma_s$ |
| Капли воды в воздухе | D_f | 0.3284 | 0.7157 | 0.6330 | 4.0228 |
| | $\delta_{\text{max},f}, \%$ | 891.79 | 12.50 | 1051.69 | 25.52 |
| Воздушные пузырьки в воде | D_f | 0.4500 | 1.9784 | 0.9792 | 13.3526 |
| | $\delta_{\text{max},f}, \%$ | 512.27 | 14.29 | 592.95 | 49.31 |
| Капли дихлорэтана в воде | D_f | 0.2475 | 1.1439 | 0.4898 | 10.5032 |
| | $\delta_{\text{max},f}, \%$ | 115.46 | 6.23 | 266.07 | 25.55 |

В табл. 1 приведены среднеквадратичные отклонения D_ζ для каждого из возмущенных параметров ($\zeta \equiv a, x, y, z$) и для всего множества параметров ($\zeta \equiv \text{all}$) для конфигураций K1 и K2. В табл. 2 представлены среднеквадратичные отклонения D_f и максимальное значение относительной погрешности $\delta_{\text{max},f}$ для функций $f \equiv H, \sigma_s$ и конфигураций K1 и K2 для всех рассмотренных случаев соотношений физических параметров вне и внутри сфер. Отметим, что максимальное значение D_{all} (см. табл. 1) примерно равно 0.03, а минимальное значение D_f (см. табл. 2) – 0.3, т.е. на порядок больше, а максимальное значение данной величины больше на три порядка. Таким образом, анализ качественных и количественных значений показывает сильную чувствительность системы к малым изменениям начальных параметров, причем конфигурация K1 является менее чувствительной, чем конфигурация K2, а функция отклика H менее чувствительна, чем функция отклика σ_s .

Анализ полученных данных также показывает, что наибольшее отклонение расчетных величин наблюдается в случае воздушных пузырьков в воде, когда отношения упругостей и плотностей вещества внутри сферы и внешней среды стремятся к бесконечности, т.е. $\chi_v/\chi_0 \rightarrow \infty$ ($\chi_\zeta = \rho_\zeta c_\zeta^2, \zeta \equiv 0, v$) и $\rho_v/\rho_0 \rightarrow \infty$, а наименьшее – капель дихлорэтана в воде (соответствует случаю $\chi_v/\chi_0 \approx 1, \rho_v/\rho_0 \approx 1$) для функции отклика H и капель воды в воздухе (соответствует случаю $\chi_v/\chi_0 \rightarrow 0, \rho_v/\rho_0 \rightarrow 0$) для функции отклика σ_s .

Заключение

В настоящей работе в рамках исследования рассеяния акустической волны на множестве звукопроницаемых сфер, произвольным образом расположенных в пространстве, при падении сферической волны от монопольного источника излучения проведен анализ чувствительности отклика всей системы на изменение исходных данных (радиуса сфер и декартовых координат их центров) при различных соотношениях физических параметров сферы и окружающей среды (плотность и скорость звука) для двух «базовых» (плоская и объемная) типов конфигурации системы.

Анализ данных вычислительного эксперимента показал, что

- среднеквадратичные отклонения функций отклика на один–три порядка больше среднеквадратичных отклонений начальных параметров;
- давление в расчетной точке (функция отклика H) менее чувствительно к случайному отклонению параметров, чем полное сечение рассеяния (функция отклика σ_s);
- наибольшее отклонение для всех функций отклика имеет место в случае $\chi_v/\chi_0 \rightarrow \infty$ и $\rho_v/\rho_0 \rightarrow \infty$, т.е. в случае газовых пузырьков в жидкости;
- наименьшее отклонение для функции отклика H имеет место в случае $\chi_v/\chi_0 \approx 1, \rho_v/\rho_0 \approx 1$, а для функции отклика $\sigma_s - \chi_v/\chi_0 \rightarrow 0, \rho_v/\rho_0 \rightarrow 0$, т.е. в случаях, когда внутри сфер находится жидкость;
- плоская конфигурация (K1) менее чувствительна к случайному отклонению параметров, чем объемная (K2), за исключением случая капель воды в воздухе для функции отклика σ_s .

Таким образом, во всех рассмотренных случаях система является сильно чувствительной к малому изменению начальных данных, при этом тип конфигурации и соотношения физических параметров среды внутри сфер и внешней среды являются существенными факторами.

Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

ЛИТЕРАТУРА

1. Насибуллаева Э. Ш. Рассеяние звуковых волн на сферах: методы решения и основные характеристики (обзор) // Многофазные системы. 2021. Т. 16. №3–4. С. 88–104.
2. Насибуллаева Э. Ш. Численный анализ акустического рассеяния от слоя капель при внешнем воздействии // Многофазные системы. 2022. Т. 17. №3–4. С. 167–176.
3. Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацьпура В. Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.
4. Насибуллаева Э. Ш. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительные технологии. 2022. Т. 27. №2. С. 19–36.
5. Gumerov N. A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112. No. 6. P. 2688–2701.
6. Skaropoulos N. C., Yagridou H. D., Chrissoulidis D. P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Am. 2003. Vol. 113. No. 6. P. 3001–3011.
7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
9. Насибуллаева Э. Ш. Численный анализ многократного рассеяния акустической волны на множестве звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15. №4. С. 383–398.
10. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
11. LAPACK – Linear Algebra PACKage. URL: <https://netlib.sandia.gov/lapack/> (дата обращения: 23.04.2024).
12. Насибуллаева Э. Ш. Численный анализ полного сечения рассеяния на множестве звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2023. Т. 18. №2. С. 50–57.

Поступила в редакцию 24.04.2024 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2024.3.1

**CHANGES IN STATISTICAL PARAMETERS OF SCATTERING CHARACTERISTICS
DURING THE INTERACTION OF AN ACOUSTIC WAVE WITH SOUND-PERMEABLE SPHERES**

© E. Sh. Nasibullaeva

*Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center of RAS
71 Oktyabrya ave., 450054 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.**Email: elvira@anrb.ru*

The paper presents the results of a study carried out in the framework of solving the problem of scattering a spherical wave from a monopole radiation source on a of sound-permeable spheres system located in 3D space. The main goal is to determine the sensitivity of the system's response to changes in the initial data (the radii of spheres and the Cartesian coordinates of their centers), considering cases with different ratios of the physical parameters of the spheres and the environment (density and speed of sound) for two different types of system configurations. The solution to the problem was obtained using a generalized calculation technique based on the fast multipole method, through a series of computational experiments. It is shown that in all considered cases the system is highly sensitive to small random changes in the initial data, and both the type of configuration and the relationship between the physical parameters of the environment inside the spheres and the external environment are significant factors.

Keywords: acoustic scattering, system of sound-permeable spheres, monopole radiation source, total scattering cross section, computational experiment, standard deviation, system response.

Received 24.04.2024.