

УДК 532.5.013.4

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2024.4.2

**ЧИСЛЕННОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ****© В. Н. Киреев¹, А. А. Мухутдинова², А. Д. Низамова²,
С. Ф. Урманчиев^{2*}**¹Уфимский университет науки и технологий
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.²Институт механики им. Р. Р. Мавлютова, УФИЦ РАН
Россия, Республика Башкортостан, 450054 г. Уфа, пр. Октября, 71.

*Email: said52@mail.ru

В настоящей работе представлены результаты исследования устойчивости течения жидкости с учетом зависимости вязкости от температуры. В качестве рабочей жидкости был использован 45-процентный водный раствор пропиленгликоля. Математическая модель была построена в соответствии с основными принципами слабо нелинейной теории гидродинамической устойчивости. Эксперименты были проведены на установке, основу которой составили две горизонтально расположенные коаксиальные трубы, выполненные из прозрачного материала. Во внутренней трубе находился нагревательный элемент для создания температурного градиента в сечении кольцевого канала. Переход от ламинарного течения к турбулентному определялся визуально с применением подкрашенной жидкости.

В ходе расчетов было установлено, что градиент температур в сечении канала приводит к снижению критического числа Рейнольдса, а минимальное значение критического числа Рейнольдса убывает с ростом параметра термовязкости жидкости. Результаты расчетов были убедительно подтверждены данными экспериментальных исследований.

Ключевые слова: гидродинамическая устойчивость, параметр термовязкости, слабонелинейная теория устойчивости, кольцевой канал, градиент температур, число Рейнольдса.

Введение

Вопросы, связанные с переходными режимами течения жидкостей, представляют значительный интерес при решении задач гидродинамики, связанных с прикладными вопросами. В настоящее время особое значение приобретает определение степени влияния неоднородного распределения температурного поля на устойчивость течения жидкостей с учетом зависимости их вязкости от температуры. По-видимому, впервые работа в этом направлении была опубликована Поттером и Грабером [1], в которой было установлено влияние разности температур на стенках канала на критическое число Рейнольдса. Впоследствии рядом авторов были опубликованы аналогичные исследования, среди которых следует выделить статью Уолла и Уилсона [2]. Достаточно полное изложение задач гидродинамической устойчивости и методов их решения приведено в книге Дразина [3].

Авторами представленной статьи также был выполнен небольшой цикл исследований в рассматриваемом направлении. Так, в статье [4] рассмотрена задача об устойчивости течения несжимаемой жидкости под действием перепада давления в плоском канале с линейным распределением температуры по его сечению. Предполагалось, что жидкость имеет экспоненциально убывающую зависимость вязкости от температуры. В ходе решения задачи были построены нейтральные кривые для различных значений параметра термовязкости (показателя экспоненты) и установлена зависимость от него критического числа Рейнольдса. Полученные результаты демонстрируют факт существенного влияния неоднородности температурного поля на устойчивость потока. Таким образом факт зависимости числа Рейнольдса от разности температур на стенках канала был подтвержден.

Обобщенная математическая модель гидродинамической устойчивости термовязкой жидкости с учетом возмущенного состояния температурного поля была представлена в работе [5]. В этом случае исходные уравнения были сведены к системе двух уравнений относительно возмущений скорости и температуры. Решение этой системы при определенных ограничениях на число Пекле было выполнено для анализа течения водного раствора пропиленгликоля – хладагента, широко используемого в холодильной промышленности.

В статье [6] были рассмотрены некоторые особенности потери устойчивости ламинарного течения жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры в кольцевом канале при заданном температурном режиме на его стенках. Уравнения модели были сведены к системе двух уравнений в цилиндрической системе координат, обобщающих классическое уравнение Орра-Зоммерфельда. Были построены спектры собственных значений и собственные функции соответствующего дифференциального оператора в случае достаточно

больших значений числа Пекле. В работе установлено, что при увеличении как параметра термовязкости, так и относительной ширины кольцевого канала диапазон изменения собственных значений вдоль действительной оси увеличивается, что делает спектр более разреженным. При этом увеличение параметра термовязкости приводит к дестабилизации рассматриваемой гидродинамической системы, а увеличение относительной ширины канала с определенного значения, напротив, стабилизирует поток. Последнее обстоятельство отражает особенности линейаризованной постановки задачи в гидродинамической теории устойчивости.

В настоящей работе выполнены теоретические и экспериментальные исследования устойчивости течения жидкости в кольцевом канале с использованием созданной экспериментальной установки.

Математическая модель для исследования гидродинамической устойчивости

Запишем исходные уравнения течения вязкой жидкости в кольцевом канале с учетом влияния температуры на ее вязкость [7]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0, \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ \quad + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_0(T) \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_0(T) \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{\mu_0(T)}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\mu_0(T)}{r^2} u_r \right], \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \\ \quad + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_0(T) \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_0(T) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\mu_0(T)}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right], \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pe}} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right]. \end{array} \right. \quad (1)$$

Граничные условия при этом имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r(r_1) = u_r(r_2) = 0, \\ u_z(r_1) = u_z(r_2) = 0, \\ p(0) = P_{in}, p(L) = P_{out}, P_{in} > P_{out}, \\ T(r_1) = T_1, T(r_2) = T_2, T_1 > T_2, \end{array} \right. \quad (2)$$

где r_1, r_2 – внутренний и внешний радиусы канала; L – длина канала; u_r и u_z – радиальная и осевая компоненты вектора скорости; p – давление; T – температура; Re и Pe – безразмерные числа Рейнольдса и Пекле; μ_0 – вязкость жидкости.

Предполагаем, что зависимость вязкости от температуры имеет вид убывающей экспоненциальной функции:

$$\mu_0 = \mu_0(T) = e^{-\alpha T},$$

где α – параметр термовязкости.

Далее, представим компоненты скорости через функцию тока:

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (3)$$

где $\psi = \psi(r, z, t)$ – функция тока, тогда система уравнений (1)–(2) примет следующую форму:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_0(T) \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_0(T) \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right) + \frac{\mu_0(T)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] + \\
& + \frac{\mu_0(T)}{r^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big], \\
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_0(T) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_0(T) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) + \frac{\mu_0(T)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right], \\
& \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pe}} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right],
\end{aligned} \right. \quad (4)$$

принимая во внимание справедливость равенств

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

следующих из уравнения неразрывности и условия отсутствия вращения жидкости вокруг оси симметрии, систему уравнений (4) можно представить таким образом:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial t} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^3} \left(2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + 3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \\
& = \frac{1}{\text{Re} r^2} \left[\frac{\partial^2 \mu_0(T)}{\partial r^2} \left(r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 \mu_0(T)}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mu_0(T)}{\partial r \partial z} \left(2r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial \mu_0(T)}{\partial r} \left(2r \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + 2r \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} - 3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + 2 \frac{\partial \mu_0(T)}{\partial z} \left(r \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} + r \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right) + \\
& + \mu_0(T) \left(2r \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial z^2} + r \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} + r \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} - 2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} - 2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{3}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \Big], \\
& \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pe}} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right].
\end{aligned} \right. \quad (6)$$

Основой применения слабо нелинейной теории гидродинамической устойчивости является разложение искомой функции тока по степеням малого параметра в комплексной области, что позволяет представить искомую функцию в виде (7):

$$\begin{aligned}
\psi = & \phi_0(r, t) + \phi_1(r, t) e^{ik(z-ct)} + \tilde{\phi}_1(r, t) e^{-ik(z-ct)} + \\
& + \phi_2(r, t) e^{2ik(z-ct)} + \tilde{\phi}_2(r, t) e^{-2ik(z-ct)} + \dots
\end{aligned} \quad (7)$$

где i – мнимая единица; $c = \frac{w}{k}$ – фазовая скорость волны вдоль оси r (собственное значение); w – частота; k – проекция волнового вектора на ось r (волновое число); $\varphi_0(r, t)$, $\varphi_1(r, t)$, $\varphi_2(r, t)$ – амплитуды возмущения; символ \sim означает комплексно-сопряженную составляющую.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \mu_0 \left[\phi_1^{VI} + \frac{2}{r} \phi_1''' - \frac{3}{r^2} \left(\phi_1'' - \frac{1}{r} \phi_1' \right) - 2k^2 \left(\phi_1'' + \frac{1}{r} \phi_1' \right) \right] - \\
 & \quad - ik \operatorname{Re} \left[\left(u_0 - c - \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\phi_1'' + \frac{1}{r} \phi_1' - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \phi_1 \right) \right] + \\
 & + \left\{ k^4 + 2 \frac{k^2}{r^2} - \frac{3}{r^4} + ik \operatorname{Re} \left[u_0'' - \frac{u_0'}{r} \right] \right\} \phi_1 + (\mu_{0r}' + \mu_{0z}') \left(2\phi_1''' + \frac{3}{r} \phi_1'' - \frac{3}{r^2} \phi_1' + \frac{1}{r} \left(\frac{3}{r^2} - k^2 \right) \phi_1 \right) + \\
 & + \left(\frac{1}{r} \mu_{0r}'' \phi_1' + \mu_{0rz}'' (\phi_1' + \phi_1) + \mu_{0z}'' \phi_1 \right) = \phi_2' (\tilde{\phi}_1'' - k^2 \tilde{\phi}_1') + 2\phi_2 (\tilde{\phi}_1''' - k^2 \tilde{\phi}_1'') - \tilde{\phi}_1 (\phi_2''' + 2\phi_2'' - 12k^2 \phi_2') + \dots, \\
 & \mu_0 \left[\phi_2^{VI} + \frac{2}{r} \phi_2''' - \frac{3}{r^2} \left(\phi_2'' - \frac{1}{r} \phi_2' \right) - 2k^2 \left(\phi_2'' + \frac{1}{r} \phi_2' \right) \right] - \\
 & \quad - ik \operatorname{Re} \left[\left(u_0 - c - \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\phi_2'' + \frac{1}{r} \phi_2' - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \phi_2 \right) \right] + \\
 & + \left\{ k^4 + 2 \frac{k^2}{r^2} - \frac{3}{r^4} + ik \operatorname{Re} \left[u_0'' - \frac{u_0'}{r} \right] \right\} \phi_2 + (\mu_{0r}' + \mu_{0z}') \left(2\phi_2''' + \frac{3}{r} \phi_2'' - \frac{3}{r^2} \phi_2' + \frac{1}{r} \left(\frac{3}{r^2} - k^2 \right) \phi_2 \right) + \\
 & + \left(\frac{1}{r} \mu_{0r}'' \phi_2' + \mu_{0rz}'' (\phi_2' + \phi_2) + \mu_{0z}'' \phi_2 \right) = -\frac{1}{2} (\phi_1' \phi_1'' - \phi_1 \phi_1''') + \dots, \\
 & \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} + ik \frac{\partial^2}{\partial r^2} \{ (\phi_1' \tilde{\phi}_1 - \tilde{\phi}_1' \phi_1) + 2(\phi_2' \tilde{\phi}_2 - \tilde{\phi}_2' \phi_2) + \dots \} = \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}, \\
 & \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{ik}{r} (\phi_1(r, t) e^{ik(z-ct)} - \tilde{\phi}_1(r, t) e^{-ik(z-ct)} + 2\phi_2(r, t) e^{2ik(z-ct)} - 2\tilde{\phi}_2(r, t) e^{-2ik(z-ct)} + \dots) \frac{\partial T}{\partial r} + \\
 & + \frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial \phi_1(r, t)}{\partial r} e^{ik(z-ct)} + \frac{\partial \tilde{\phi}_1(r, t)}{\partial r} e^{-ik(z-ct)} + \frac{\partial \phi_2(r, t)}{\partial r} e^{2ik(z-ct)} + \frac{\partial \tilde{\phi}_2(r, t)}{\partial r} e^{-2ik(z-ct)} + \dots \right) \frac{\partial T}{\partial z} = \\
 & = \frac{1}{Pe} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right],
 \end{aligned} \right. \tag{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(r_1) &= \varphi_1(r_2) = 0, & \varphi_1'(r_1) &= \varphi_1'(r_2) = 0, \\
 \varphi_2(r_1) &= \varphi_2(r_2) = 0, & \varphi_2'(r_1) &= \varphi_2'(r_2) = 0, \\
 T(r_1) &= T_1, T(r_2) = T_2, & T_1 &> T_2,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где $u = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r}$; $u_0 = u_0(r) = \frac{\eta_M^2 ((fr)^\beta - 1) - \beta ((fr)^{\beta+2} - 1)}{\eta_M^2 (\eta_M^\beta - 1) - \beta (\eta_M^{\beta+2} - 1)}$ – невозмущенная скорость; $T_0(r) = \frac{(T_2 - T_1) \ln r + T_1 \ln r_2 + T_2 \ln r_1}{\ln h}$ – невозмущенная температура; $h = \frac{r_2}{r_1}$, $f = \frac{h-1}{2}$, $\eta_M^2 = \frac{\beta}{(\beta+2)(h^{\beta+2}-1)(h^\beta-1)}$, $\beta = \frac{\alpha}{\ln h + \frac{1}{Nu}}$; Nu – число Нуссельта.

Система уравнений (8)–(9) состоит из четырех уравнений, левая часть первых двух из которых идентична уравнению гидродинамической устойчивости в кольцевом канале в линейном приближении с дополнительными слагаемыми для первого и второго приближения соответственно. Правая часть этих уравнений – это сумма парных произведений величин второго порядка малости. Третье уравнение системы является уравнением относительно вторых смешанных производных, а четвертое – характеризует изменение температурного поля.

Нелинейная задача на собственные значения решалась численно с помощью компьютерного кода с использованием пакета для вычислений с открытым исходным кодом Chebfun в пакете прикладных программ MATLAB. Для решения задачи в первом приближении, как и ранее, используем спектральный метод на основе разложения по полиномам Чебышева первого рода. Разработанный на предыдущем этапе выполнения проекта алгоритм позволяет получить результаты с точностью до 15 знака.

В результате проведенных расчетов получены зависимости критического числа Рейнольдса от параметра, характеризующего отношение ширины канала к радиусу внутреннего цилиндра $\zeta = r_2 / r_1 - 1$ для различных значений параметра термовязкости $\alpha = 0.001$, $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ (рис. 1). Первая точка линии, соответствующей $\alpha = 0.001$, имеет координаты (0.001; 5 810). При столь малом значении параметра термовязкости α течение жидкости можно считать практически изотермическим, так как вязкость при этом малочувствительна к изменению температуры, а при значении относительной ширины канала $\zeta = 0.001$ можно считать его приближенно плоским. Таким образом, полученное значение критического числа Рейнольдса $Re_c = 5\,810$ достаточно близко к значению $Re_c = 5\,772$, соответствующему классическому уравнению Орра-Зоммерфельда для плоского канала. График наглядно демонстрирует, как с увеличением относительной ширины канала происходит рост критического числа Рейнольдса. Это есть проявление недостатка линейной теории устойчивости: в цилиндрическом канале поток должен быть ламинарным при любых числах Рейнольдса, что, естественно, не соответствует действительности. При параметрах термовязкости $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$, течение жидкости в неоднородном температурном поле проявляет свои особенности. В отличие от первого случая, если относительная ширина канала находится в пределах $0.001 \leq \zeta \leq 3.0$, то кривая изменения критического значения числа Рейнольдса имеет немонотонный характер. Вначале происходит его уменьшение, а затем с увеличением разности радиусов кривизны стенок возникает тенденция к росту критического числа Рейнольдса. Таким образом, при течении термовязких жидкостей с различными значениями температуры на стенках кольцевого канала наблюдается зона снижения порога перехода к турбулентному течению.

Результаты расчетов с привлечением концепции слабо нелинейной теории [8] (пунктирные линии на рис. 1) позволили установить ограничения на значение критического числа Рейнольдса при всех рассмотренных значениях параметра термовязкости, хотя и далекого от экспериментального значения, равного $Re_c = 2\,500$ в изотермическом потоке.

На рис. 2 изображена итоговая кривая изменения минимальных значений критического числа Рейнольдса в зависимости от параметра термовязкости при величинах относительной ширины канала, соответствующих рис. 1. Следует отметить, что при аппроксимации экспериментальных данных зависимости вязкости от температуры пропиленгликоля параметр термовязкости оказался приблизительно равным $\alpha = 1.5$. Критическое число Рейнольдса при этом имеет значение $Re_c = 2\,200$.

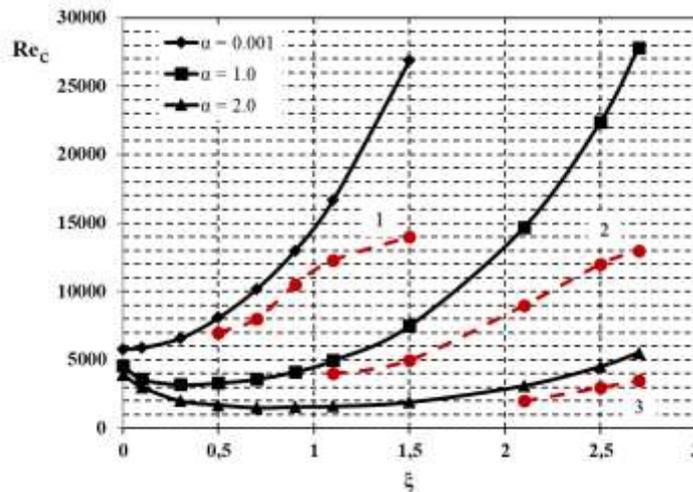


Рис. 1. Зависимость критического числа Рейнольдса от относительной ширины кольцевого канала ζ при значениях параметра термовязкости $\alpha = 0.001$; 1.0 и 2.0. Пунктирные линии соответствуют результатам слабо нелинейной теории.

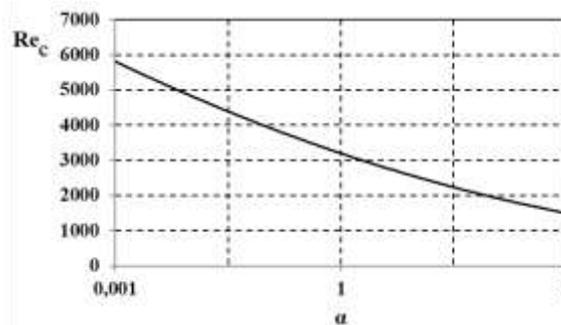


Рис. 2. Зависимость минимального значения критического числа Рейнольдса от параметра термовязкости при изотермическом течении.

Результаты экспериментов

В данной работе вместе с теоретическими исследованиями были проведены эксперименты по исследованию влияния неоднородного температурного поля на ламинарно-турбулентный переход. С этой целью была создана установка, с помощью которой были выполнены экспериментальные исследования режимов течения раствора пропиленгликоля в кольцевом канале. Установка представляла собой две горизонтально расположенные коаксиальные трубы, образующие кольцевой канал, в который подавалась рабочая жидкость. Внутренняя цилиндрическая труба установки содержала нагревательный элемент [9]. Для минимизации влияния конвективных потоков полая игла, через которую подавалась подкрашенная жидкость, располагалась в нижней части кольцевого канала.

Исследования ламинарно-турбулентного перехода проводились как для изотермического течения, так и с неоднородным распределением температуры по сечению кольцевого канала.

На рис. 3 (а, б) представлены результаты визуализации течения водного раствора пропиленгликоля с помощью подкрашенного раствора того же вещества при значении числа Рейнольдса равно $Re = 1\ 600$. На верхнем рисунке (а) наблюдается картина ламинарного течения, а на нижнем (б) – начало турбулизации потока. Отличие режимов течения связано с тем, что на верхнем рисунке эксперимент проводился при одинаковых температурах на стенках канала, а на нижнем – при температурном перепаде, равным $\Delta T = 5\ ^\circ C$. Таким образом, экспериментально удалось показать, что критическое число Рейнольдса зависит от распределения вязкости по сечению канала, связанного с разностью температур на стенках канала.

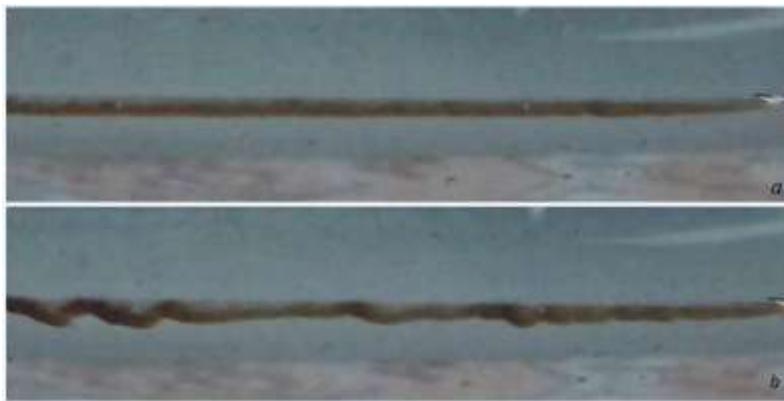


Рис. 3. Поведение подкрашенной струи в потоке раствора пропиленгликоля при $Re = 1\ 600$: (а) – $\Delta T = 0^\circ C$; (б) – $\Delta T = 5\ ^\circ C$.

Таким образом, экспериментально удалось показать, что критическое число Рейнольдса зависит от температурного градиента, приводящего к неоднородному распределению вязкости по сечению канала.

Заключение

В данной работе было установлено, что при конечных значениях параметра термовязкости и с увеличением относительной ширины канала значение критического числа Рейнольдса изменяется немонотонно, при этом его минимальные значения зависят от реологических свойств жидкости и имеют вид функции, убывающей с ростом параметра термовязкости. Полученные результаты могут служить теоретическим обоснованием проведения оптимизационных расчетов при моделировании технологических процессов.

На основе анализа экспериментальных данных было показано, что критическое число Рейнольдса зависит от распределения вязкости по сечению канала, связанного с разностью температур на стенках канала. Таким образом, установлено, что основные положения развитой теории устойчивости термовязких жидкостей в неоднородном поле температур, соответствуют физической реальности.

Необходимо подчеркнуть, что результаты сравнения теоретических, с одной стороны, и экспериментальных исследований – с другой – носят качественный характер.

Работа выполнена при финансовой поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

ЛИТЕРАТУРА

1. Potter M., Graber E. Stability of plane Poiseuille flow with heat transfer // *Physics of Fluids*, 1972. Vol. 15. No. 3. P. 387–391.
2. Wall D. P., Wilson K. The linear stability of channel flow of fluid with temperature-dependent viscosity // *J. Fluid Mech.* 1996. Vol. 323. P. 107–132.
3. Drazin P. G. *Introduction to Hydrodynamic Stability*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
4. Киреев В. Н., Низамова А. Д., Урманчиев С. Ф. Некоторые особенности гидродинамической неустойчивости термовязкой жидкости в плоском канале // *Прикладная математика и механика*. 2019. №3. С. 454–459. DOI: 10.1134/S003282351903007X [Kireev V. N., Nizamova A. D., Urmancheev S. F. Some Features of Hydrodynamic Instability of a Plane Channel Flow of a Thermoviscous Fluid // *Fluid Dynamics*. 2019. Vol. 54. No. 7. P. 978–982. DOI: 10.1134/S0015462819070073].

5. Nizamova A. D., Murtazina R. D., Kireev V. N., Urmancheev S. F. Features of laminar-turbulent transition for the coolant flow in a plane heat-exchanger channel // *Lobachevskii J. Math.* 2021. Vol. 42. P. 2211–2215. DOI: 10.1134/S1995080221090249.
6. Nizamova A. D., Kireev V. N., Urmancheev S. F. Influence of temperature dependence of viscosity on the stability of fluid flow in an annular channel // *Lobachevskii J. Math.* 2024. Vol. 44. No. 5. P. 1778–1784. DOI: 10.1134/S1995080223050463.
7. Мухутдинова А. А., Киреев В. Н., Урманчиев С. Ф. Влияние переменных теплофизических свойств на течение вязкой жидкости в кольцевом канале // *Вестник Башкирского университета.* 2022. Т. 27. №4. С. 847–851. DOI 10.33184/bulletin-bsu-2022.4.6.
8. Stuart J. T. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows // *Journal of Fluid Mechanics.* 1960. Vol. 9. No. 3. P. 353–370. DOI: 10.1017/S002211206000116X.
9. Мухутдинова А. А., Низамова А. Д., Киреев В. Н., Урманчиев С. Ф. Экспериментальная установка для исследования устойчивости течения жидкости // *Многофазные системы.* 2024. Т. 19. №1. С. 35–39. DOI: 10.21662/mfs2024.1.005 [Mukhutdinova A. A., Nizamova A. D., Kireev V. N., Urmancheev S. F. Experimental setup for researching the stability of fluid flow // *Multiphase Systems.* 2024. Vol. 19. No. 1. P. 35–39. DOI: 10.21662/mfs2024.1.005].

Поступила в редакцию 15.11.2024 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2024.4.2

**NUMERICAL AND EXPERIMENTAL MODELING OF THE STABILITY
OF THE FLOW OF THERMOVISCOUS FLUID IN AN ANNULAR CHANNEL****© V. N. Kireev¹, A. A. Mukhutdinova², A. D. Nizamova²,
S. F. Urmancheev^{2*}***Ufa University of Science and Technology
32 Zaki Validi st. 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.***Email: said52@mail.ru*

This paper presents the results of a study of fluid flow stability taking into account the viscosity dependence on temperature. A 45% aqueous solution of propylene glycol was used as the working fluid. The mathematical model was constructed in accordance with the basic principles of the weakly nonlinear theory of hydrodynamic stability. The experiments were conducted on a setup based on two horizontally located coaxial pipes made of transparent material. The inner pipe contained a heating element to create a temperature gradient in the cross-section of the annular channel. The transition from laminar to turbulent flow was determined visually using tinted liquid.

The calculations showed that the temperature gradient in the channel cross-section leads to a decrease in the critical Reynolds number, and the minimum critical Reynolds number decreases with an increase in the liquid thermal viscosity parameter. The calculation results were convincingly confirmed by experimental data.

Keywords: hydrodynamic stability, thermoviscosity parameter, weakly nonlinear stability theory, annular channel, temperature gradient, Reynolds number.

Received 15.11.2024.