

раздел МАТЕМАТИКА и МЕХАНИКА

УДК 534.1+531.3+519.6

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2025.1.1

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

© Л. Р. Нусратуллина*, Э. М. Нусратуллин, В. П. Павлов

*Уфимский университет науки и технологий**Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.**Тел.: +7 (347) 229 96 32.***Email: mardliliya@yandex.ru*

В статье излагается методика численного вычисления основных геометрических характеристик поперечного сечения произвольной формы для естественно закрученного стержня: площади, центра тяжести, осевых и центробежных моментов инерции. Эти параметры являются необходимыми исходными данными для системы дифференциальных уравнений, описывающих поперечные колебания естественно закрученного стержня. Оценка погрешности методики выполнена на основе численных результатов с точными, получаемыми для тестовой задачи при рассмотрении сечения в форме эллипса, для которого геометрические характеристики определяются точными аналитическими выражениями.

Ключевые слова: *естественно закрученный стержень, геометрические характеристики сечения, центр тяжести, площадь сечения, моменты инерции, глобальная система координат, главная система координат, центральная система координат, эллиптическое сечение.*

Введение

Рассматривается естественно закрученный стержень, имеющий переменное по длине поперечное сечение произвольной формы. Примерами такого стержня являются лопасти компрессора и турбины газотурбинного двигателя (ГТД). Закрутка стержня и сложные формы поперечных сечений очень усложняют получение аналитических формул для его расчетов на прочность, жесткость и колебания. Поэтому в данной ситуации появляется необходимость применения численных методов. При создании и практической реализации численных методов требуется валидация и оценка их точности, что во многих случаях реализуется на тестовых примерах, имеющих точные решения.

В связи с этим в данной статье предложен численный метод определения геометрических характеристик поперечного сечения произвольной формы, который можно эффективно реализовать на современных компьютерах. Для оценки точности данной методики построена эталонная задача с поперечным сечением стержня в форме эллипса. Для сечения данной формы получены точные аналитические формулы, позволяющие вычислить основные геометрические параметры в различных системах координат и затем использовать их для тестирования вычислительной программы, реализующей предлагаемый численный метод определения геометрических характеристик поперечных сечений естественно закрученного стержня.

Постановка задачи

Рассмотрим естественно закрученный стержень с переменными по длине сечениями (рис. 1). Ось Z направлена в радиальном направлении вдоль оси стержня перпендикулярно к осям X и Y . Геометрия стержня определяется его поперечными сечениями, задаваемыми координатами точек контуров сечений в координатной плоскости XU . Традиционно для каждого сечения определяются главные центральные оси ξ, η , а затем определяются углы α между главной осью сечения ξ и глобальной координатной осью X (рис. 1). Зависимость $\alpha = \alpha(z)$ рассматривается как функция естественной закрутки стержня.

Такой подход удобен при определении напряжений в естественно закрученных стержнях при изгибе, но не удобен при анализе изгибных колебаний. Поэтому авторами данной статьи при расчете частот собственных колебаний естественно закрученных стержней не определяются главные оси поперечных сечений стержня, а изгибные поперечные колебания стержня описываются во времени t функциями перемещений $u = u(z, t)$ и $v = v(z, t)$ точек его оси вдоль координатных осей X, Y в системе из двух дифференциальных уравнений [1–2]:

$$\begin{cases} EI_X \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_X}{\partial z} \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + E \frac{\partial^2 I_X}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + EI_{XY} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_{XY}}{\partial z} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + E \frac{\partial^2 I_{XY}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ EI_Y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_Y}{\partial z} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + E \frac{\partial^2 I_Y}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + EI_{XY} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_{XY}}{\partial z} \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + E \frac{\partial^2 I_{XY}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где используются механические характеристики материала стержня: модуль упругости E и плотность ρ , а также изменяющиеся вдоль оси Z : площадь A , осевые I_X , I_Y и центробежный I_{XY} моменты инерции – относительно глобальных координатных осей X, Y , определяемые по формулам:

$$I_X = \int_A y^2 dA, \quad I_Y = \int_A x^2 dA, \quad I_{XY} = \int_A xy dA.$$

В статьях [3–4] изложен метод алгебраических полиномов пятой степени, который позволяет с высокой точностью на основе системы уравнений (1) находить частоты изгибных колебаний естественно закрученного стержня переменного сечения при различных краевых условиях.

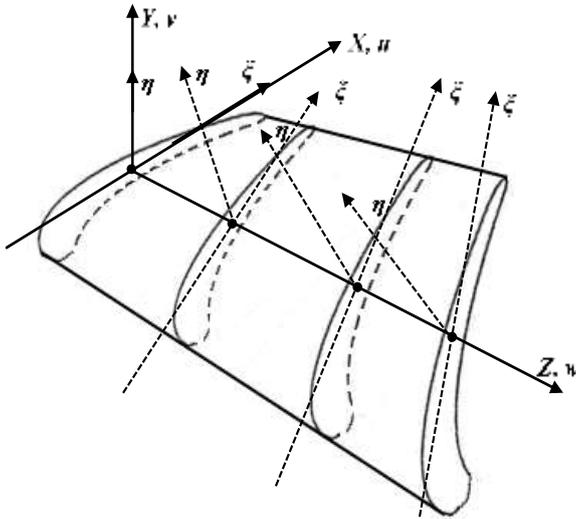


Рис. 1. Естественно закрученный стержень с переменными по длине сечениями.

Поэтому для расчета на колебания необходимы функции изменения вдоль оси Z геометрических характеристик поперечных сечений A , I_X , I_Y , I_{XY} . В зависимости от назначения конструкции возможно большое разнообразие форм поперечных сечений стержня, у которых отсутствуют аналитические выражения для вычисления A , I_X , I_Y , I_{XY} . Поэтому имеется необходимость в методике численного определения данных геометрических параметров поперечного сечения при задании его контура координатами расположенных на нем точек.

В связи с этим целью данной статьи является разработка методики численного определения геометрических характеристик поперечных сечений стержня и оценка точности ее компьютерной реализации при решении тестовой задачи, имеющей точное решение.

Методика численного определения геометрических характеристик поперечных сечений стержня

1. Разбиение сечения стержня на треугольники

При определении геометрических характеристик поперечного сечения выбирается некоторая глобальная система декартовых координатных осей X, Y и по отношению к ней координатами точек задается контур сечения. В случае лопаток ГТД этими координатами являются точки спинки $x_i^c, x_i^c, i=1, \dots, N$ и корытца $x_i^k, x_i^k, i=1, \dots, N$.

Имея такую информацию, разобьем поперечное сечение стержня на ряд треугольников, для каждого из которых в отдельности по методике, изложенной далее, определим центр тяжести, площадь, осевые и центробежные моменты инерции относительно центральных координатных осей, параллельных глобальным осям X, Y .

2. Определение центра тяжести, площади, осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных координатных осей, параллельных основаниям треугольника

Для реализации этого процесса используется система глобальных координатных осей X, Y, Z с ортами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ (рис. 2). В данной координатной системе поочередно рассматриваются все треугольники поперечного сечения, при этом рассматриваемый треугольник обозначается $T_1T_2T_3$ с вершинами $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2), T_3(x_3, y_3)$ (рис. 2). Обязательным условием является такой порядок нумерации узлов, при котором обход треугольника в порядке возрастания номеров узлов ($T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3$) наблюдается в направлении противоположном движению часовой стрелки при взгляде на встречу орту \mathbf{e}_z (рис. 2). Вдоль сторон треугольника направим орты $\mathbf{e}_1^{(T_1T_2)}, \mathbf{e}_1^{(T_2T_3)}, \mathbf{e}_1^{(T_3T_1)}$ (рис. 2).

Орт $\mathbf{e}_1^{(T_1T_2)}$ определяется выражениями:

$$\mathbf{e}_1^{(T_1T_2)} = b_x^{(12)} \mathbf{e}_x + b_y^{(12)} \mathbf{e}_y,$$

$$b_x^{(12)} = \frac{1}{b_{12}}(x_2 - x_1), b_y^{(12)} = \frac{1}{b_{12}}(y_2 - y_1),$$

где

$$b_{12} = |T_1T_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

(2)

Орт $\mathbf{e}_1^{(T_2T_3)}$, определяется выражениями:

$$\mathbf{e}_1^{(T_2T_3)} = b_x^{(23)} \mathbf{e}_x + b_y^{(23)} \mathbf{e}_y,$$

где

$$b_x^{(23)} = \frac{1}{b_{23}}(x_3 - x_2), b_y^{(23)} = \frac{1}{b_{23}}(y_3 - y_2),$$

$$b_{23} = |T_2T_3| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}.$$

(3)

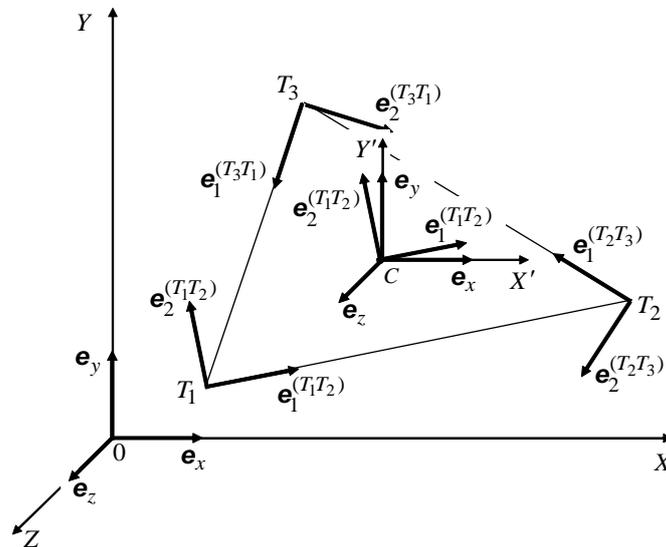


Рис. 2. Треугольник в системе координат X, Y, Z и X', Y', Z' .

Аналогично орт $\mathbf{e}_1^{(T_3T_1)}$ определяется выражениями:

$$\mathbf{e}_1^{(T_3T_1)} = b_x^{(31)} \mathbf{e}_x + b_y^{(31)} \mathbf{e}_y,$$

(4)

где

$$b_x^{(31)} = \frac{1}{b_{31}}(x_1 - x_3), b_y^{(31)} = \frac{1}{b_{31}}(y_1 - y_3), b_{31} = |\overline{T_3T_1}| = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}. \quad (5)$$

Соответствие выбранной нумерации узлов требованию обхода треугольника против движения часовой стрелки проверяем знаком смешанного произведения. Должно быть:

$$\mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{e}_1^{(T_1T_2)} \times \mathbf{e}_1^{(T_2T_3)}) = b_x^{(12)} \cdot b_y^{(23)} - b_y^{(12)} \cdot b_x^{(23)} > 0 \quad (6)$$

Иначе необходимо выполнить перенумерацию узлов в противоположном порядке.

Перпендикулярно к данным ортам направим орты $\mathbf{e}_2^{(T_1T_2)}$, $\mathbf{e}_2^{(T_2T_3)}$, $\mathbf{e}_2^{(T_3T_1)}$ (рис. 2).

Учтем, что плоскость треугольника $T_1T_2T_3$ совпадает с плоскостью осей X, Y , ось Z и ее орт \mathbf{e}_z перпендикулярны к плоскости треугольника $T_1T_2T_3$. При этом условия орты $\mathbf{e}_2^{(T_1T_2)}$, $\mathbf{e}_2^{(T_2T_3)}$, $\mathbf{e}_2^{(T_3T_1)}$ определим как векторные произведения и с учетом (5), (7) получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2^{(T_1T_2)} &= \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1^{(T_1T_2)} = -b_y^{(12)} \mathbf{e}_x + b_x^{(12)} \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_2^{(T_2T_3)} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1^{(T_2T_3)} = -b_y^{(23)} \mathbf{e}_x + b_x^{(23)} \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_2^{(T_3T_1)} &= \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1^{(T_3T_1)} = -b_y^{(31)} \mathbf{e}_x + b_x^{(31)} \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (7)$$

В начале, зная координаты вершин треугольника, определим его площадь A и координаты x_C, y_C его центра тяжести C [5]:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad x_C = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \quad (8)$$

Определив центр тяжести треугольника C проведем через него центральные оси X', Y' , параллельные глобальным осям X, Y (рис. 2) и поставим задачу определения относительно этих осей моментов инерции $I_{X'}$, $I_{Y'}$ и $I_{X'Y'}$. Для этого вначале запишем выражения для определения осевых моментов инерции данного треугольника относительно трех осей X_{12}, X_{23}, X_{31} , проходящих через центр тяжести C , и совпадающих по направлению с ортами $\mathbf{e}_1^{(T_1T_2)}$, $\mathbf{e}_1^{(T_2T_3)}$, $\mathbf{e}_1^{(T_3T_1)}$ (рис. 2). Обозначим данные осевые моменты инерции соответственно $I_{X_{12}}^{(T_1T_2)}$, $I_{X_{23}}^{(T_2T_3)}$ и $I_{X_{31}}^{(T_3T_1)}$. Для определения момента инерции $I_{X_{12}}^{(T_1T_2)}$ вначале определим длину отрезка T_1T_2 :

$$b_{12} = |\overline{T_1T_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (9)$$

Зная площадь A треугольника и длину b_{12} его стороны T_1T_2 (рис. 2), вычислим высоту треугольника h_{12} , опущенную из вершины T_3 на сторону T_1T_2 воспользовавшись формулой $h_{12} = \frac{2A}{b_{12}}$. Относительно центральной оси X_{12} , параллельной стороне T_1T_2 , осевой момент инерции определяются формулой [5]:

$$I_{X_{12}}^{(T_1T_2)} = \frac{b_{12} h_{12}^3}{36}.$$

Далее по аналогии рассмотрим центральные оси X_{23}, X_{31} , параллельные сторонам T_2T_3 и T_3T_1 , и определим относительно этих осей осевые моменты инерции:

$$\begin{aligned} h_{23} &= \frac{2A}{b_{23}}, \quad b_{23} = |\overline{T_2T_3}| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}, \quad I_{X_{23}}^{(T_2T_3)} = \frac{b_{23} h_{23}^3}{36} \\ h_{31} &= \frac{2A}{b_{31}}, \quad b_{31} = |\overline{T_3T_1}| = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}, \quad I_{X_{31}}^{(T_3T_1)} = \frac{b_{31} h_{31}^3}{36} \end{aligned} \quad (10)$$

3. Определение осевых и центробежного моментов инерции треугольника относительно центральных осей треугольника, параллельных глобальным осям X, Y

Определив моменты инерции $I_{X_{12}}^{(T_1T_2)}$, $I_{X_{23}}^{(T_2T_3)}$ и $I_{X_{31}}^{(T_3T_1)}$, переходим к определению моментов инерции относительно центральных осей треугольника, параллельных глобальным осям X, Y . Для этого получим и применим

формулы для вычисления моментов инерции при повороте координатных осей. При этом реализуем новый алгоритм реализации этого процесса, отличающийся от традиционного.

Для его построения выбираем систему координатных осей X', Y' с ортами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ и началом в точке C (рис. 3). Далее рассматриваем некоторую геометрическую фигуру, в пределах которой вблизи точки K выделяем элементарную площадку с площадью dA (рис. 3). В координатной системе $X'CY'$ координаты рассматриваемой точки K обозначим x', y' . Далее выберем другую ортогональную координатную систему X_1CX_2 с началом в точке C и осями X_1, X_2 , направление которых задается ортами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ (рис. 3). Положение точки K в данной координатной системе определяется координатами x_1, x_2 . Положение точки K определим радиус-вектором $\mathbf{r} = \overline{CK}$. В координатной системе $X'CY'$ положение точки K определяется координатами x', y' и соответственно радиус-вектором \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y. \tag{11}$$

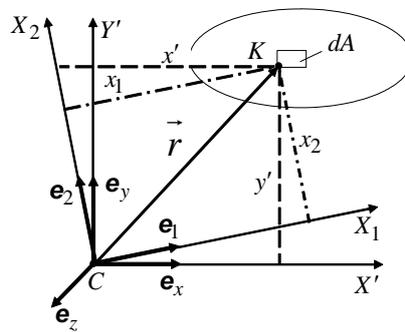


Рис. 3. Фигура в системах координат $X'CY'$ и X_1CX_2 .

В координатной системе X_1CX_2 положение точки K определяется координатами x_1, x_2 и тем же радиус-вектором \mathbf{r} , записанным в другой форме:

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \tag{12}$$

Выразим координаты x_1, x_2 через координаты x', y' . Для этого умножим равенство (12) скалярно на орты \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 :

$$x_1 = \mathbf{r}\mathbf{e}_1, \quad x_2 = \mathbf{r}\mathbf{e}_2. \tag{13}$$

Подставив (11) в (13), получим:

$$x_1 = x'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_y, \quad x_2 = x'\mathbf{e}_2\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_2\mathbf{e}_y. \tag{14}$$

Введем обозначения $k_{1,x} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_x, \quad k_{1,y} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_y, \quad k_{2,x} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_x, \quad k_{2,y} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_y$, тогда (14) примет вид:

$$\begin{cases} x_1 = k_{1,x}x' + k_{1,y}y', \\ x_2 = k_{2,x}x' + k_{2,y}y'. \end{cases} \tag{15}$$

Запишем выражения для моментов инерции $I_{X'}, I_{Y'}, I_{X'Y'}$ относительно осей X' и Y' :

$$I_{X'} = \int_A (y')^2 dA, \quad I_{Y'} = \int_A (x')^2 dA, \quad I_{X'Y'} = \int_A x'y' dA. \tag{16}$$

Относительно осей X_1 и X_2 моменты $I_{X_1}, I_{X_2}, I_{X_1X_2}$ вычисляются по формулам:

$$I_{X_1} = \int_A (x_2)^2 dA, \quad I_{X_2} = \int_A (x_1)^2 dA, \quad I_{X_1X_2} = \int_A x_1x_2 dA. \tag{17}$$

Подставим (15) в (17) и получим формулы для вычисления моментов инерции относительно осей X_1, X_2 через моменты инерции $I_{X'}, I_{Y'}, I_{X'Y'}$ относительно осей X' и Y' :

$$\begin{cases} I_{X_1} = \int_A (k_{2,x}x' + k_{2,y}y')^2 dA = (k_{2,y})^2 I_{X'} + 2k_{2,x}k_{2,y} I_{X'Y'} + (k_{2,x})^2 I_{Y'}, \\ I_{X_2} = \int_A (k_{1,x}x' + k_{1,y}y')^2 dA = (k_{1,y})^2 I_{X'} + 2k_{1,x}k_{2,y} I_{X'Y'} + (k_{1,x})^2 I_{Y'}, \\ I_{X_1Y_1} = \int_A (k_{1,x}x' + k_{1,y}y')(k_{2,x}x' + k_{2,y}y') dA = k_{1,y}k_{2,y}^2 I_{X'} + (k_{1,x}k_{2,y} + k_{2,x}k_{1,y}) I_{X'Y'} + k_{1,x}k_{2,x} I_{Y'}. \end{cases} \quad (18)$$

Теперь вернемся к треугольнику $T_1T_2T_3$, одному из всех, на которые разбита рассматриваемая геометрическая фигура. В этом треугольнике через его центр тяжести проведем оси X', Y' , параллельные глобальным осям X, Y . Это позволяет нам в дальнейшем работать с ортами осей X, Y .

На основе (17) с учетом (4), (5) и (6) запишем:

$$\begin{cases} k_{1,x}^{(T_1T_2)} = \mathbf{e}_1^{(T_1T_2)} \mathbf{e}_x = b_x^{(12)}, \\ k_{1,y}^{(T_1T_2)} = \mathbf{e}_1^{(T_1T_2)} \mathbf{e}_y = b_y^{(12)}, \\ k_{2,x}^{(T_1T_2)} = \mathbf{e}_2^{(T_1T_2)} \mathbf{e}_x = -b_y^{(12)}, \\ k_{2,y}^{(T_1T_2)} = \mathbf{e}_2^{(T_1T_2)} \mathbf{e}_y = b_x^{(12)}, \\ k_{1,x}^{(T_2T_3)} = \mathbf{e}_1^{(T_2T_3)} \mathbf{e}_x = b_x^{(23)}, \\ k_{1,y}^{(T_2T_3)} = \mathbf{e}_1^{(T_2T_3)} \mathbf{e}_y = b_y^{(23)}, \\ k_{2,x}^{(T_2T_3)} = \mathbf{e}_2^{(T_2T_3)} \mathbf{e}_x = -b_y^{(23)}, \\ k_{2,y}^{(T_2T_3)} = \mathbf{e}_2^{(T_2T_3)} \mathbf{e}_y = -b_x^{(23)}, \\ k_{1,x}^{(T_3T_1)} = \mathbf{e}_1^{(T_3T_1)} \mathbf{e}_x = b_x^{(31)}, \\ k_{1,y}^{(T_3T_1)} = \mathbf{e}_1^{(T_3T_1)} \mathbf{e}_y = b_y^{(31)}, \\ k_{2,x}^{(T_3T_1)} = \mathbf{e}_2^{(T_3T_1)} \mathbf{e}_x = -b_y^{(31)}, \\ k_{2,y}^{(T_3T_1)} = \mathbf{e}_2^{(T_3T_1)} \mathbf{e}_y = b_x^{(31)}. \end{cases} \quad (19)$$

Воспользуемся первым уравнением из системы (18) и запишем с учетом (19) систему из трех алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (k_{2,y}^{(T_1T_2)})^2 I_{X'} + 2k_{2,x}^{(T_1T_2)}k_{2,y}^{(T_1T_2)} I_{X'Y'} + (k_{2,x}^{(T_1T_2)})^2 I_{Y'} = I_{X_1}^{(T_1T_2)}, \\ (k_{2,y}^{(T_2T_3)})^2 I_{X'} + 2k_{2,x}^{(T_2T_3)}k_{2,y}^{(T_2T_3)} I_{X'Y'} + (k_{2,x}^{(T_2T_3)})^2 I_{Y'} = I_{X_1}^{(T_2T_3)}, \\ (k_{2,y}^{(T_3T_1)})^2 I_{X'} + 2k_{2,x}^{(T_3T_1)}k_{2,y}^{(T_3T_1)} I_{X'Y'} + (k_{2,x}^{(T_3T_1)})^2 I_{Y'} = I_{X_1}^{(T_3T_1)}. \end{cases} \quad (20)$$

Решив систему (20) относительно $I_{X'}, I_{X'Y'}, I_{Y'}$, определим искомые моменты инерции относительно координатной системы $X'Y'$, определяемой центральными осями X', Y' рассматриваемого треугольника, которые параллельны глобальным осям X, Y .

В итоге, если поперечное сечение разбито на M треугольников, то в нашем распоряжении имеются массивы:

- площадей треугольников $A_m, m = \overline{1, M}$;
- координат $x_C^{(m)}, y_C^{(m)}, m = \overline{1, M}$ центров тяжести треугольников относительно глобальных координатных осей X, Y ;
- моментов инерции $I_{X'}^{(m)}, I_{Y'}^{(m)}, I_{X'Y'}^{(m)}$ относительно центральных осей X', Y' рассматриваемого треугольника, параллельных глобальным координатным осям X, Y .

4. Определение координат центра тяжести поперечного сечения стержня относительно глобальных осей X, Y

Для определения центра тяжести поперечного сечения лопасти определяем [6] его площадь $A = \sum_{m=1}^M A_m$

и статические моменты относительно осей X, Y :

$$S_x = \sum_{m=1}^M y_C^{(m)} A_m, \quad S_y = \sum_{m=1}^M x_C^{(m)} A_m. \quad (21)$$

Затем вычисляем [5] координаты x_C, y_C поперечного сечения относительно глобальных координатных

осей X, Y : $x_C = \frac{S_y}{A}, \quad y_C = \frac{S_x}{A}$.

5. Определение моментов инерции поперечного сечения лопасти относительно центральных осей сечения X_C, Y_C , параллельных глобальным осям X, Y

Через центр тяжести сечения C проведем центральные оси X_C, Y_C , параллельные глобальным осям X, Y и определим относительно X_C, Y_C моменты инерции по формулам:

$$I_x = \sum_{m=1}^M [I_{x'}^{(m)} + A_m (y_C^{(m)} - y_C)^2], \quad I_y = \sum_{m=1}^M [I_{y'}^{(m)} + A_m (x_C^{(m)} - x_C)^2],$$

$$I_{xy} = \sum_{m=1}^M [I_{x'y'}^{(m)} + A_m (y_C^{(m)} - y_C)(x_C^{(m)} - x_C)]. \quad (22)$$

При расчетах частот собственных колебаний именно эти моменты инерции сечений подставляются в систему уравнений (1).

6. Определение главных центральных осей и моментов инерции относительно этих осей

Главные центральные оси поперечного сечения лопатки ξ, η определим углом α , откладываемым от оси X_C к оси ξ при положительном направлении отсчета в направлении противоположном движению часовой стрелки [5]. Для главных осей угол α определяется выражением [5]:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (23)$$

Определив α , рассчитаем моменты инерции сечения по формулам [5]:

$$\begin{cases} I_\xi = I_x \cos^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha + I_y \sin^2 \alpha, \\ I_\eta = I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha + I_y \cos^2 \alpha, \\ I_{\xi\eta} = I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha. \end{cases} \quad (24)$$

Тестовая задача для оценки точности численного метода вычисления геометрических характеристик поперечного сечения лопасти

Для оценки точности предлагаемой выше методики численного определения геометрических характеристик поперечного сечения стержня воспользуемся точными формулами для вычисления координат центра тяжести, площади, осевых и центробежного моментов инерции сечений в виде эллипса. Использование эллипса в качестве контура профиля позволяет построить разбиение его контура точками, координаты которых вычисляются аналитически. Это позволит объективно провести валидацию и анализ точности предлагаемого численного метода для вычисления геометрических характеристик поперечных сечений стержня на основе координат ее профиля.

Аналитические выражения для вычисления геометрических характеристик стержня с эллиптическим сечением

На рис. 4 представлено поперечное сечение стержня в виде эллипса. Площадь эллипса:

$$A = \pi ab. \quad (25)$$

Проведем через центр тяжести профили C главные центральные оси ξ, η (рис. 4). Относительно этих осей осевые и центробежный моменты инерции [6]:

$$I_\xi = \frac{\pi ab^3}{4}, \quad I_\eta = \frac{\pi a^3 b}{4}, \quad I_{\xi\eta} = 0. \quad (26)$$

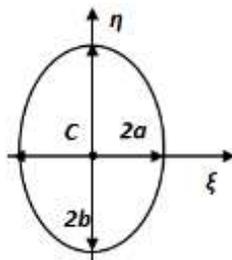


Рис. 4. Профиль эллиптического сечения.

При известном угле α моменты инерции сечения определяются по формулам (24).

$$I_x = I_\xi \cos^2 \alpha + I_\eta \sin^2 \alpha, \quad I_y = I_\xi \sin^2 \alpha + I_\eta \cos^2 \alpha, \quad I_{xy} = \frac{I_\xi - I_\eta}{2} \sin 2\alpha. \quad (27)$$

Координаты контурных точек профиля и центра тяжести в глобальной системе OXY

Рассмотрим эллипс в некоторой произвольной координатной системе OXY , где направление координатных осей определены их ортами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ (рис. 5).

Проведем через центр тяжести профиля C главные центральные оси ξ, η , направление которых определим ортами \mathbf{e}_ξ и \mathbf{e}_η .

Определим координаты точки профиля $T(\xi_n, \eta_n)$ эллиптического сечения относительно координатной системы ξ, η :

$$\begin{cases} \xi_n = b \cos \beta_n, \eta_n = a \sin \beta_n \\ \beta_n = \frac{2\pi}{N+1} n, \\ n = 0, \dots, N, \end{cases} \quad (28)$$

Координаты точки $T(x_n, y_n)$ относительно координатной системы OXY :

$$\begin{cases} x_n = b \cos(\alpha + \beta_n) = b(\cos \alpha \cos \beta_n - \sin \alpha \sin \beta_n), \\ y_n = a \sin(\alpha + \beta_n) = a(\sin \alpha \cos \beta_n + \cos \alpha \sin \beta_n), \\ \beta_n = \frac{2\pi}{N+1} n, n = 0, \dots, N, \end{cases} \quad (29)$$

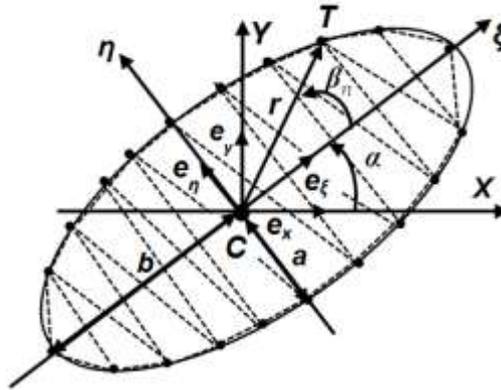


Рис. 5. Сечение стержня, центр тяжести сечения C , главные оси сечения ξ, η и оси X, Y глобальной координатной системы.

Результаты решения тестовой задачи по определению геометрических характеристик поперечного сечения профиля стержня

По изложенной выше методике разбиения сечения на треугольники, вершины которых вычислялись по формулам (28) и (29), были выполнены расчеты геометрических характеристик при числе $M = N - 1 = 10, 100, 1\,000$ и $2\,600$ узлов на границе профиля эллиптического сечения, с полуосями равными $b = 40$ мм и $a = 4$ мм. Угол поворота $\alpha = 30^\circ$.

При этом численно определялись следующие расчетные значения геометрических параметров профиля: A^p – площадь профиля в координатной системе OXY ; I_X^p, I_Y^p, I_{XY}^p – моменты инерции профиля относительно координатной системы OXY ; I_ξ^p, I_η^p – моменты инерции профиля относительно главных центральных осей ξ, η профиля.

Для рассматриваемого профиля известны точные значения геометрических параметров: $A, I_X, I_Y, I_\xi, I_\eta$, для эллиптического сечения, вычисленные по формулам (25)–(27).

На их основе рассчитаем десятичные логарифмы относительных погрешностей численного определения геометрических характеристик профиля:

$$\lg |\delta| = \lg \left| \frac{P-T}{T} \right|,$$

где P – расчетные значения $A^p, I_x^p, I_y^p, I_{xy}^p, I_\xi^p, I_\eta^p$,

T – точные значения $A, I_x, I_y, I_{xy}, I_\xi, I_\eta$.

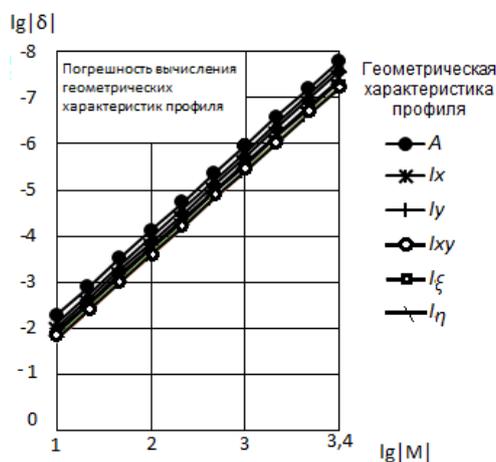


Рис. 6. График изменения $\lg |\delta|$ относительных погрешностей вычисления от десятичного логарифма числа отрезков $\lg M$.

На рис. 6 представлены зависимости десятичных логарифмов абсолютных значений $\lg |\delta|$ относительных погрешностей вычисления всех перечисленных выше геометрических параметров профиля от десятичного логарифма $\lg M$ числа отрезков M на профиле эллипса.

Из рис. 6 видно, что имеет место второй порядок сходимости численных результатов к точным для всех геометрических характеристик поперечного сечения.

Заключение

Предложена методика численного расчета геометрических характеристик поперечного сечения стержня, исходной информацией для которой являются координаты точек контура сечения. Основой данной методики являются разбиение сечения на треугольники и предлагаемый авторами эффективно реализуемый на компьютере алгоритм вычисления геометрических характеристик отдельных треугольников с последующим вычислением геометрических характеристик всего сечения целиком.

Выполнена оценка точности предлагаемого численного метода сравнением численных результатов с точными для сечения в форме эллипса, для которого есть точные аналитические формулы вычисления геометрических характеристик. Показано, что данная методика имеет второй порядок точности.

На базе данной методики разработана компьютерная программа, позволяющая оперативно определять с необходимой для практики точностью геометрические характеристики поперечных сечений лопаток газотурбинных двигателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов В. П., Нусратуллина Л. Р. Собственные изгибные колебания естественно закрученного стержня // Вестник УГАТУ. 2019. №4. С. 33–41.
2. Pavlov V. P., Nusratullina L. R., Kudoyarova V. M. Eigenfrequency spectrum analysis of bending vibrations for naturally swirled rod // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2020. No. 709. Art. 022059. P. 1–8.
3. Павлов В. П., Нусратуллина Л. Р. Метод расчета собственных частот и форм поперечных колебаний стержня переменного сечения с упругим закреплением // Вестник УГАТУ. 2019. №3. С. 24–38.
4. Павлов В. П., Нусратуллина Л. Р. Крутильные колебания стержня непостоянного сечения // Вестник УГАТУ. 2022. №1. С. 22–30.
5. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с.
6. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наукова думка, 1975. 704 с.

Поступила в редакцию 20.11.2024 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2025.1.1

THE TECHNIQUE OF NUMERICAL CALCULATION OF GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF THE CROSS SECTION OF A NATURALLY TWISTED ROD OF VARIABLE CROSS SECTION© **L. R. Nusratullina***, **E. M. Nusratullin**, **V. P. Pavlov***Ufa University of Science and Technology
32 Zaki Validi st., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.**Phone: +7 (347) 229 96 32.***Email: mardliliya@yandex.ru*

The article describes a technique for numerically calculating the main geometric characteristics of an arbitrary cross-section for a naturally twisted rod: area, center of gravity, axial and central moments of inertia. These parameters are necessary input data for a system of differential equations describing transverse vibrations of a naturally twisted rod. The estimation of the error of the technique is based on numerical results with exact results obtained for the test problem when considering an ellipse-shaped section for which geometric characteristics are determined by precise analytical expressions.

Keywords: naturally twisted rod, geometric characteristics of section, center of gravity, section area, moments of inertia, global coordinate system, principal coordinate system, central coordinate system, elliptical section.

*Received: 20.11.2024.***Об авторах/About the authors****НУСРАТУЛЛИНА Лилия Ринатовна**

Уфимский университет науки и технологий, Россия.
Старший преподаватель кафедры
искусственного интеллекта и перспективных
математических исследований.
Дипл. математик (БашГУ, 2003).

НУСРАТУЛЛИН Эдуард Марсович

Уфимский университет науки и технологий, Россия.
Доцент кафедры искусственного интеллекта
и перспективных математических исследований.
Дипл. магистр математики (БашГУ, 2004).
Канд. техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2012).

ПАВЛОВ Виктор Павлович

Уфимский университет науки и технологий, Россия.
Профессор кафедры сопротивления материалов.
Дипл. инж. по авиац. двигателям (УАИ, 1973).
Доктор техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2005).

NUSRATULLINA Liliya Rinatovna

Ufa University of Science and Technology, Russia.
Senior Lecturer of the Department of Artificial Intelligence
and Advanced Mathematical Research.
Dipl. of specialist in mathematics
(Bashkir State University, 2003).

NUSRATULLIN Eduard Marsovich

Ufa University of Science and Technology, Russia.
Associate Professor of the Department of Artificial Intelligence
and Advanced Mathematical Research.
Dipl. of specialist in mathematics
(Bashkir State University, 2004).

PAVLOV Victor Pavlovich

Ufa University of Science and Technology, Russia.
Professor of the Department of Strength of Materials.
Dipl. of engineer for aircraft engines
(Ufa Aviation Institute, 1973).
Doctor of Technical Sciences
(Ufa State Aviation Technical University, 2005).