

УДК 519.242.7, 534.26

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2026.1.2

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ДВУХ ЗВУКОПРОНИЦАЕМЫХ СФЕРАХ

© Э. Ш. Насибуллаева

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН
Россия, Республика Башкортостан, 450054 г. Уфа, пр. Октября, 71.

*Email: elvira@anrb.ru

Проведен анализ рассеяния акустической волны на двух звукопроницаемых сферах при воздействии монопольного источника излучения с помощью численной методике, основанной на методе ортогонального центрального композиционного планирования. Данная методика реализована для трехфакторного вычислительного эксперимента, где в качестве факторов выбраны один физический и два геометрических параметра системы. Цели работы – определение факторов, изменение которых существенным образом влияет на всю систему; нахождение значений варьируемых параметров, при которых целевая функция принимает оптимальные (наименьшее и наибольшее) значения; исследование системы при оптимальных значениях параметров. Показано, что система с каплями является нечувствительной только для малого, а с пузырьками – для большого волнового радиуса. Построенные при оптимальных параметрах системы диаграммы распределения давления позволили выявить зоны повышения и понижения давления, которые сильно зависят от физических свойств сред.

Ключевые слова: акустическое рассеяние, звукопроницаемая сфера, вычислительный эксперимент, регрессионный анализ, метод ортогонального центрального композиционного планирования, монопольный источник излучения.

Введение

Для понимания фундаментальной природы явления рассеяния акустической волны на системе звукопроницаемых сфер, когда волна проходит через поверхность раздела (случай пузырьков или капель), одной из важнейших подзадач является изучение механизма взаимодействия между частицами в системе. Системы, состоящие из двух рассеивателей, позволяют подробно изучить взаимодействие между рассеянными от сфер полями, поскольку оно является достаточно простым для проведения теоретического анализа. Несмотря на то, что существует достаточно много работ, посвященных исследованию пары сфер (см., например, обзор [1]), в основном в них рассматриваются звуконепрозрачные сферы, когда волна не проходит через поверхность раздела (случай твердых сфер с различным акустическим импедансом). Системы пары воздушных пузырьков были рассмотрены, например, в работах [2–3]. В работе [2] теоретически и экспериментально исследовалось обратное рассеяние звука от системы двух воздушных пузырьков, которые были расположены симметрично относительно оси, проходящей через источник звука перпендикулярно оси, соединяющей центры сферических частиц. Теоретические исследования работы [3] посвящены взаимодействию двух близко расположенных пузырьков в акустическом поле; моделирование задачи проводилось в рамках теории многократного рассеяния с использованием разложения по сферическим гармоникам и теореме сложения [4–5]; получено точное характеристическое уравнение, которое обеспечивает симметричный и антисимметричный резонансы двух пузырьков. Таким образом, теоретические исследования взаимодействия пары звукопроницаемых сфер при воздействии акустической волны на сегодняшний день остается актуальной задачей акустики.

В рамках настоящего исследования представлены результаты по изучению механизма рассеяния волны от монопольного источника излучения на системе, состоящей из двух пузырьков или капель, с помощью одного из методов регрессионного анализа, а именно, метода ортогонального центрального композиционного планирования (ОЦКП) [6–10]. В работе [11] данный метод реализован для анализа рассеяния волны на системе двух звуконепрозрачных сфер с различной комплексной полной проводимостью их поверхности. В настоящей работе исследования по взаимодействию проведены для случая звукопроницаемых сфер (воздушных пузырьков в воде или капель воды в воздухе) на основе трехфакторного вычислительного эксперимента, где в качестве факторов также был выбран один физический (волновой радиус) и два геометрических (отношение радиусов сфер и расстояние между центрами сфер) параметра системы. Отметим, что верификация общего численного алгоритма расчета рассеяния волны на системе множества звукопроницаемых сфер, представленного в работе [12] и примененного в настоящем исследовании для системы двух сфер, с результатами лабораторных экспериментов [2] была проведена в работе [13], где показано хорошее их качественное и количественное согласование.

Основными целями работы являются: определение основных параметров, изменение которых существенным образом влияет на всю систему; определение значений варьируемых параметров системы, при которых искомая функция (нормированное давление в фиксированной точке) принимает наименьшее и наибольшее значения; исследование системы при оптимальных значениях параметров.

Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим две звукопроницаемые сферы, имеющие различные радиусы a_1 и a_2 . Система двух сфер расположена в трехмерном пространстве, заполненном однородной средой плотности ρ_0 и имеющей скорость звука c_0 . Общую систему декартовых координат выберем так, чтобы ось z проходила через центры сфер, а начало координат располагалось в середине их соединяющего отрезка. Тогда радиус-векторы центров сфер будут иметь координаты $\mathbf{r}'_1 = (0, 0, \delta l/2)$ и $\mathbf{r}'_2 = (0, 0, -\delta l/2)$. На систему воздействует сферическая волна от монополюсного источника излучения, расположенного в точке M_s на оси координат x , радиус-вектор которой равен $\mathbf{r}_s = (-d_s, 0, 0)$ (d_s – расстояние от монополюсного источника излучения до геометрического центра сфер). Общая схема задачи представлена на *рис. 1*. Предполагается, что центры сфер неподвижны, радиальное движение сферической поверхности отсутствует, а через поверхность сфер проходит волна, которая распространяется в другой среде, имеющей плотность ρ_v и скорость звука c_v .

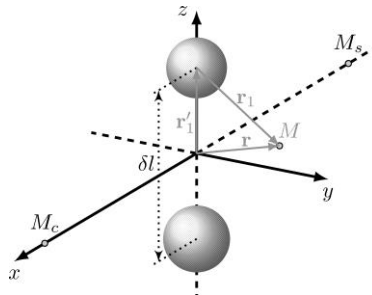


Рис. 1. Схема системы, состоящей из двух сфер различных радиусов: M_s – монополюсный источник излучения; M_c – расчетная точка.

Математическая модель, описывающая рассеяние акустической волны на паре звукопроницаемых сфер, приведена в работе [11], а в случае звукопроницаемых сфер в общем виде – в работе [12]. Представление комплексного потенциала $\Psi(\mathbf{r})$ внешнего поля [14–15] в случае двух сфер ($N = 2$) примет следующий вид

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_{in}(\mathbf{r}) + \Psi_{scat}(\mathbf{r}) = \Psi_{in}(\mathbf{r}) + \Psi_{scat}^{(1)}(\mathbf{r}) + \Psi_{scat}^{(2)}(\mathbf{r}),$$

где $\Psi_{in}(\mathbf{r}) = -V_0 e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|} / (4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|)$ – потенциал падающего поля для монополюсного источника излучения; V_0 – производительность монополюсного источника излучения; i – мнимая единица; k_0 – волновое число для внешней среды; $\Psi_{scat}(\mathbf{r})$ – потенциал поля рассеяния, удовлетворяющий условию излучения Зоммерфельда [16], которое соответствует затуханию уходящей на бесконечность волне, и представляющийся в следующем виде [14]:

$$\Psi_{scat}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_n^{(1)m} S_n^m(\mathbf{r}_1) + A_n^{(2)m} S_n^m(\mathbf{r}_2)),$$

здесь $\mathbf{r}_v = (r_v, \theta_v, \varphi_v) = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_v$ ($v = 1, 2$), т.е. осуществлен переход к сферической системе координат, связанной с центром v -й сферы (см. *рис. 1*); $A_n^{(v)m}$ – неизвестные коэффициенты разложения по мультиполям; $S_n^m(\mathbf{r}_v) = h_n(k_0 r_v) Y_n^m(\theta_v, \varphi_v)$ – мультиполь порядка n и степени m ; $h_n(z)$ – сферические функции Ханкеля 1-го типа; $Y_n^m(\theta_v, \varphi_v)$ – ортогональные сферические гармоники [17]. В соответствии с методом повторного разложения по мультиполям [14–15] решение задачи сводится к определению коэффициентов $A_n^{(v)m}$ из решения системы линейных алгебраических уравнений, которая в матричном виде записывается как [12]:

$$\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{D}, \tag{1}$$

а матрица и векторы определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{L} = \{L_{u_0 t_0}\} = \begin{pmatrix} \{\delta_{u_1 t_1}\} & \{L_{u_1 t_1}^{(12)}\} \\ \{L_{u_1 t_1}^{(21)}\} & \{\delta_{u_1 t_1}\} \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \{A_{u_0}\} = \begin{pmatrix} \{A_l^{(1)s}\}^T \\ \{A_l^{(2)s}\}^T \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \{D_{t_0}\} = \begin{pmatrix} \{D_n^{(1)m}\}^T \\ \{D_n^{(2)m}\}^T \end{pmatrix},$$

$$D_n^{(w)m} = -\frac{j_n(k_0 a_w) j'_n(k_w a_w) - \kappa_w j'_n(k_0 a_w) j_n(k_w a_w)}{h_n(k_0 a_w) j'_n(k_w a_w) - \kappa_w h'_n(k_0 a_w) j_n(k_w a_w)} C_{in,n}^m(\mathbf{r}'_w),$$

$$L_{u_1 t_1}^{(vw)} = \frac{j_l(k_0 a_w) j'_l(k_w a_w) - \kappa_w j'_l(k_0 a_w) j_l(k_w a_w)}{h_l(k_0 a_w) j'_l(k_w a_w) - \kappa_w h'_l(k_0 a_w) j_l(k_w a_w)} (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw}) \quad (v \neq w),$$

$$u_0 = (v-1)(n_{tr}+1)^2 + (l+1)^2 - (l-s); \quad u_1 = (l+1)^2 - (l-s);$$

$$t_0 = (w-1)(n_{tr}+1)^2 + (n+1)^2 - (n-m); \quad t_1 = (n+1)^2 - (n-m);$$

$$l = 0, 1, \dots, n_{tr}; \quad s = -l, \dots, l; \quad n = 0, 1, \dots, n_{tr}; \quad m = -n, \dots, n; \quad v, w = 1, 2.$$

Здесь $j_n(z)$ и $j'_n(z)$ – сферические функции Бесселя 1-го типа и их производные [17]; k_w – волновое число внутри ν -й сферы; $\kappa_w = (k_0 \rho_w) / (k_w \rho_0)$ – введенный параметр; $C_{in,n}^m(\mathbf{r}'_w)$ – коэффициенты разложения потенциала падающего поля Ψ_{in} около $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_w$; $(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw})$ – коэффициенты перехода при повторном разложении по мультиполям [14]; $\delta_{u_1 t_1}$ – символ Кронекера; n_{tr} – число усечения рядов при разложении.

Значение давления $p_M(\mathbf{r})$ в некоторой точке пространства M с радиус-вектором \mathbf{r} через потенциал Ψ вычисляется по следующей формуле [11]:

$$p_M(\mathbf{r}) = i\omega\rho_0 \left(\Psi_{in}(\mathbf{r}) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_n^{(1)m} S_n^m(\mathbf{r}_1) + A_n^{(2)m} S_n^m(\mathbf{r}_2)) \right), \quad (2)$$

где $\omega = 2\pi f$ – угловая частота; f – частота внешнего поля.

Трехфакторный вычислительный эксперимент и анализ результатов

В рамках метода ОЦКП проведем трехфакторный вычислительный эксперимент ($n = 3$) для трех основных параметров системы: волнового радиуса $k_0 a_1$, отношения радиусов сфер a_2/a_1 и расстояния между центрами сфер δl – при их отклонении от фиксированных (средних) значений $(k_0 a_1)_0$, $(a_2/a_1)_0$ и $(\delta l)_0$ на 10% (малое отклонение от средних величин $\delta_{fix} = 0,1$). Факторы зададим как

$$X_j = 1 \pm \delta_{fix}, j = 1, 2, 3,$$

что позволяет свести их рассмотрение к одному диапазону $[X_{j,-1}, X_{j,+1}] = [0,9; 1,1]$ ($X_{j,-1}$ и $X_{j,+1}$ – нижний и верхний уровни j -го фактора, $j = 1, 2, 3$). Отклонения величин от средних значений в этом случае можно записать в следующем виде:

$$k a_1 = X_1 (k_0 a_1)_0, a_2/a_1 = X_2 (a_2/a_1)_0, \delta l = X_3 (\delta l)_0.$$

Кодированные значения j -го фактора, определяемые как $x_j = (X_j - X_{j,c})/X_{j,l}$ ($X_{j,c} = (X_{j,-1} + X_{j,+1})/2$ – центральное значение, $X_{j,l} = (X_{j,+1} - X_{j,-1})/2$ – интервал варьирования j -го фактора), будут изменяться в диапазоне $[-1; 1]$.

Для проведения анализа в конкретной точке пространства определим целевую функцию (функцию отклика) Y как модуль нормированного давления в расчетной точке M_c , симметричной монополюному источнику излучения M_s относительно геометрического центра системы сфер (см. рис. 1), т.е. $Y \equiv |p_{M_c}/p_{in,M_c}|$ (p_{M_c} – давление в точке M_c , определяемое по формуле (2); p_{in,M_c} – давление падающего поля в точке M_c).

В соответствии с методом ОЦКП строится регрессионная модель (уравнение регрессии) второго порядка в виде квадратичного полинома:

$$p(x_1, x_2, x_3) = b_0 + \sum_{j_1=1}^3 b_{j_1} x_{j_1} + \sum_{j_1=1}^3 \sum_{j_2=j_1+1}^3 b_{j_1 j_2} x_{j_1} x_{j_2} + \sum_{j_1=1}^3 b_{j_1 j_1} (x_{j_1}^2 - \beta), \quad (3)$$

где $b_0, b_{j_1}, b_{j_1 j_2}, b_{j_1 j_1}$ – коэффициенты регрессии, определяемые после реализации плана соответствующего вычислительного эксперимента; $\beta = \sqrt{2^n/n_t}$ – параметр смещения; $n_t = 15$ – число опытов в эксперименте. Матрица ОЦКП и формулы для определения коэффициентов регрессии приведены в работе [11]. Отметим, что значения коэффициентов регрессии позволяют определить степень влияния соответствующих данному коэффициенту факторов, а именно, чем больше числовое значение коэффициента, тем большее влияние. При этом, если коэффициент положительный, то с увеличением значения соответствующего фактора параметр оптимизации увеличивается, в противном случае – уменьшается.

Вычислительные эксперименты проводились для средних значений волнового радиуса $(k_0 a_1)_0 = 1, 3$ и 6 , отношения радиусов $(a_2/a_1)_0 = 1$ (при расчетах значение a_1 было фиксировано, менялось только значение a_2), расстояния $(\delta l)_0 = 6a_1$. Расстояние от монополюсного источника излучения до начала координат $d_{M_s} = 10a_1$. Рассмотрены физические параметры сред, соответствующие каплям воды ($\rho = 998$ кг/м³, $c = 1484$ м/с) в воздухе ($\rho = 1,205$ кг/м³, $c = 343,1$ м/с) и воздушным пузырькам в воде.

Для численной реализации метода ОЦКП разработан программный код на языке программирования Fortran 90 (GCC) в среде MSYS2 (MinGW-w64). Отметим, что для рассматриваемой задачи возможно применение техники разложения по мультиполям для решения системы уравнений (1) как с помощью осесимметричного алгоритма, приведенного в работе [18], где ось симметрии проходит через центры сфер, так и с применением оптимизированного алгоритма [15], который разработан для общего случая множества сфер, расположенных произвольным образом в трехмерном пространстве.

В табл. 1 представлены следующие результаты трехфакторного вычислительного эксперимента для различных значений волнового радиуса $(k a_1)_0$ и капель воды в воздухе:

– значение F , полученное по F -критерию Фишера [11; 19], позволяющему провести проверку адекватности модели регрессии, а именно, если $F > F_{кр,\alpha F}(f_1, f_2)$, то модель является адекватной, причем чем больше F , тем

эффективнее уравнение регрессии (3). Здесь критические значения $F_{кр,\alpha_F}(f_1, f_2)$ определяется по известным таблицам (см, например, в [6; 20]). В рамках настоящей работы числа степеней свободы равны [11] $f_1 = 14$ и $f_2 = 5$, тогда для уровня значимости $\alpha_F = 5\%$ имеем $F_{кр,5\%}(14,5) = 2,96$;

Таблица 1

Результаты вычислительного эксперимента для системы,
состоящей из двух капель воды в воздухе

$(k_0 a_1)_0$	F	$ b \leq b_{кр}$	\bar{x}_{min}	\bar{x}_{max}	Y_{cp}	$\delta_{Y,\%}$, %
1	334,83	b_{22}, b_{33}	(1, 1, 1)	(-1, -1, -1)	0,9728	2,96
3	49,94	$b_2, b_{12}, b_{23},$ b_{11}, b_{22}, b_{33}	(-1, 1, -1)	(1, 1, 1)	0,9893	21,28
6	5,93	$b_2, b_{12}, b_{23},$ b_{11}, b_{22}, b_{33}	(0,4073, -1, 1)	(-1, -1, -1)	1,0812	15,65

Таблица 2

Результаты вычислительного эксперимента для системы,
состоящей из двух воздушных пузырьков в воде

$(k_0 a_1)_0$	F	$b \leq b_{кр}$	\bar{x}_{min}	\bar{x}_{max}	Y_{cp}	$\delta_{Y,\%}$, %
1	361,5	$b_{12}, b_{11}, b_{22},$ b_{33}	(-1, 1, -1)	(1, -1, 1)	0,5779	21,05
3	592,74	b_{12}, b_{22}	(-1, 1, -1)	(1, -1, 1)	0,9998	25,52
6	4,08	$b_1, b_2, b_{12},$ b_{11}, b_{22}	(-1, 1, -1)	(-1, 1, 1)	1,2629	7,3

– незначимые коэффициенты уравнения регрессии (3), для определения которых применяется t -критерий Стьюдента [20–21], а именно, для которых выполняется неравенство $|b| \leq b_{кр}$ (расчет критических величин $b_{кр}$ подробно представлен в [11]);

– набор кодированных параметров \bar{x}_{min} и \bar{x}_{max} , при которых целевая функция Y достигает своего наименьшего и наибольшего значений Y_{min} и Y_{max} в трехмерной области параметров $[-1; 1]^3$;

– среднее значение целевой функции $Y_{cp} = (Y_{max} - Y_{min})/2$;

– отклонение целевой функции от среднего значения Y_{cp} , выраженное в процентах, $\delta_{Y,\%}$. Если $\delta_{Y,\%} \leq \delta_{фик,\%} = 10\%$, то целевая функция Y считается нечувствительной, а в противном случае – чувствительной к изменению параметров системы, причем чем выше $\delta_{Y,\%}$, тем больше степень влияния параметров на данную систему.

В табл. 2 приведены аналогичные результаты для воздушных пузырьков в воде.

На рис. 2 представлены графики для целевой функции Y в зависимости от фактора X_i , когда два остальных фактора имеют фиксированные значения в центральных точках диапазонов варьирования, для трех значений волнового радиуса и двух рассматриваемых систем сфер.

Отметим, что в случае двух воздушных пузырьков в воде (рис. 2(б)) при расчетах по полной модели при некотором значении первого и второго факторов наблюдаются резонансы, что качественно согласуется с результатами работы [15], где было показано, что рассеяние на конфигурации двух пузырьков разных размеров генерирует резкие резонансы на частотах выше резонанса двух пузырьков одного радиуса.

Анализ данных, представленных в табл. 1 и 2 и на рис. 2, показывает, что:

– для всех рассмотренных случаев модель (3) является адекватной, причем чем больше волновое число, следовательно, и взаимодействие между сферами в системе, тем меньше число F и больше отклонение уравнения регрессии (3) от результатов расчетов (2), полученные с помощью полной модели (1), что наглядно видно на рис. 2;

– для капель воды в воздухе при малом волновом радиусе все коэффициенты регрессии, соответствующие линейному воздействию (b_{j_1}) и взаимному влиянию факторов ($b_{j_1 j_2}, j_1 \neq j_2$), а также при квадратичном слагаемом для 1-го фактора (b_{11}) являются значимыми, т.е. вносят существенный вклад в целевую функцию, причем рост любого фактора приводит к уменьшению ее значения, поскольку все коэффициенты регрессии являются отрицательными; при увеличении волнового радиуса существенное влияние на Y оказывают только 1-й и 3-й факторы при линейных слагаемых (b_1 и b_3) и их взаимодействие ($b_{13} > 0$), т.е. остальными слагаемыми при дальнейшем рассмотрении можно пренебречь, при этом для $(k_0 a_1)_0 = 3$ рост линейного воздействия 1-го и 3-го факторов приводит к падению целевой функции ($b_1, b_3 < 0$), а для $(k_0 a_1)_0 = 6$ – к росту ($b_1, b_3 > 0$);

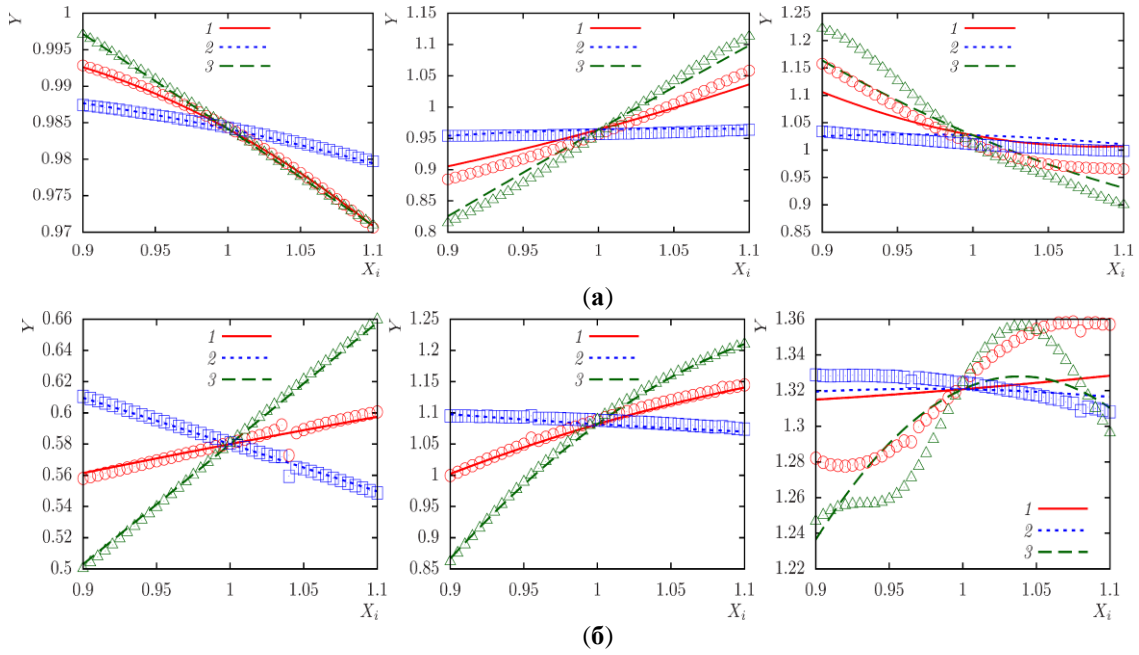


Рис. 2. Зависимость целевой функции Y от фактора X_i в случае капель воды в воздухе (а) и воздушных пузырьков в воде (б) для значений волнового радиуса $(k_0 a_1)_0 = 1$ (слева); $(k_0 a_1)_0 = 3$ (в центре); $(k_0 a_1)_0 = 6$ (справа):
 $1 - i = 1, X_2 = X_3 = 1$; $2 - i = 2, X_1 = X_3 = 1$; $3 - i = 3, X_1 = X_2 = 1$.
 Линии – полином (3); символы — данные вычислительного эксперимента.

– для систем с пузырьками наиболее существенное воздействие факторов наблюдается при $(k_0 a_1)_0 = 3$, при этом рост факторов приводит к уменьшению целевой функции при линейном воздействии 1-го и 3-го факторов и при взаимодействии 2-го и 3-го факторов ($b_1, b_3, b_{23} < 0$); для малого волнового радиуса к уменьшению Y приводит только рост 2-го фактора при линейном слагаемом ($b_2 < 0$), а для большого – при взаимодействии 1-го и 3-го факторов и при нелинейной слагаемом 3-го фактора ($b_{13}, b_{33} < 0$);

– целевая функция принимает наименьшее и наибольшее значения на границе параметрической области. В случае системы пузырьков наименьшее значение достигается для всех волновых радиусов при одном наборе кодированных параметров системы \bar{x}_{\min} ;

– среднее значение целевой функции растет с увеличением волнового радиуса, причем для пузырьков рост происходит значительнее: $Y_{\text{ср}}$ при $(k_0 a_1)_0 = 6$ возрастает на 118,5% по сравнению со значением при $(k_0 a_1)_0 = 1$, а для капель прирост составляет только 11,1%;

– целевая функция Y является нечувствительной ($\delta_{Y,\%} < 10\%$) к изменению основных параметров системы для малого волнового радиуса в случае капель и большого – для пузырьков, в остальных случаях система является чувствительной к изменению параметров.

Исследуем системы при найденных наименьших и наибольших значениях целевой функции Y для наборов кодированных параметров \bar{x}_{\min} и \bar{x}_{\max} , приведенных в табл. 2 и 3, построив фазовые диаграммы (рис. 3–6) распределения давления в плоскостях, содержащих:

- монополярный источник излучения M_s ($x = -d_s$) для анализа обратных волн;
- расчетную точку M_c ($x = d_s$) для анализа волн, прошедших через систему сфер;
- центры обеих сфер и точки M_s и M_c ($y = 0$), что позволит изучить распределение волн вокруг и внутри самих сфер.

По диаграммам, построенным в плоскостях $x = -d_s$, видно, что во всех случаях обратные волны мало влияют на картину распределения давления – отклонение от давления падающей волны во всех фазовой плоскости не превышает 8%.

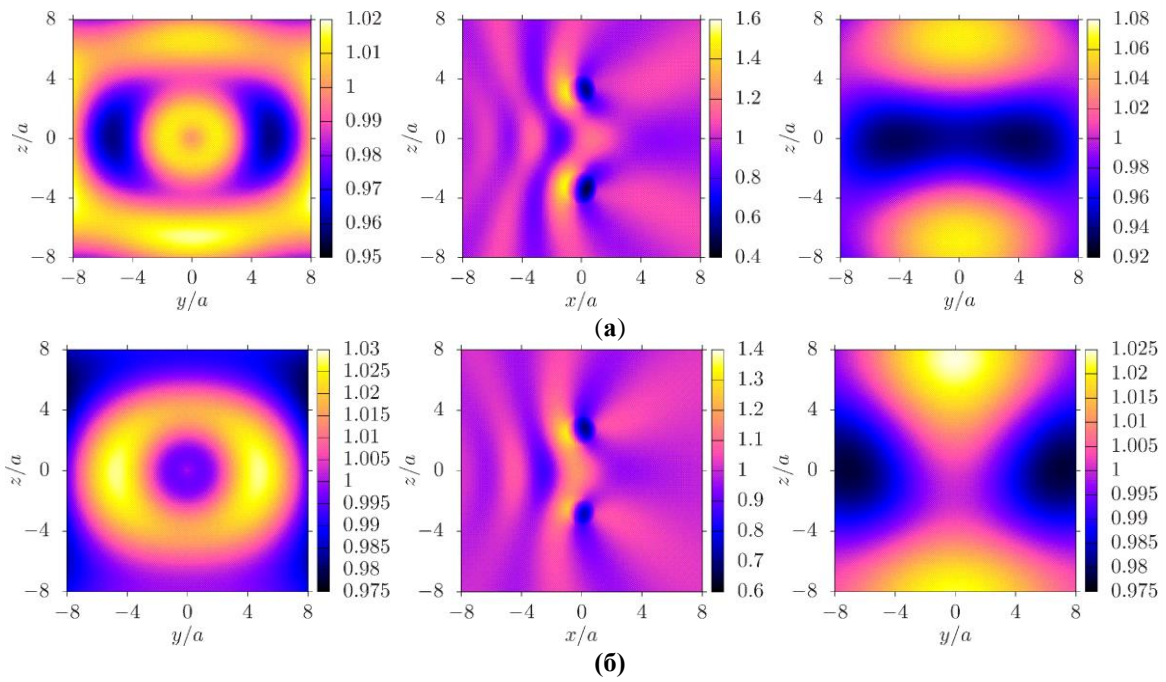


Рис. 3. Диаграммы распределения нормированного давления $|p/p_{in}|$ при наборе кодированных параметров $\bar{x}_{min} = (1, 1, 1)$ (а) и $\bar{x}_{max} = (-1, -1, -1)$ (б) в плоскостях $x = -d_s$ (слева), $y = 0$ (в центре), $x = d_s$ (справа) в случае двух капель воды в воздухе для $(k_0 a_1)_0 = 1$.

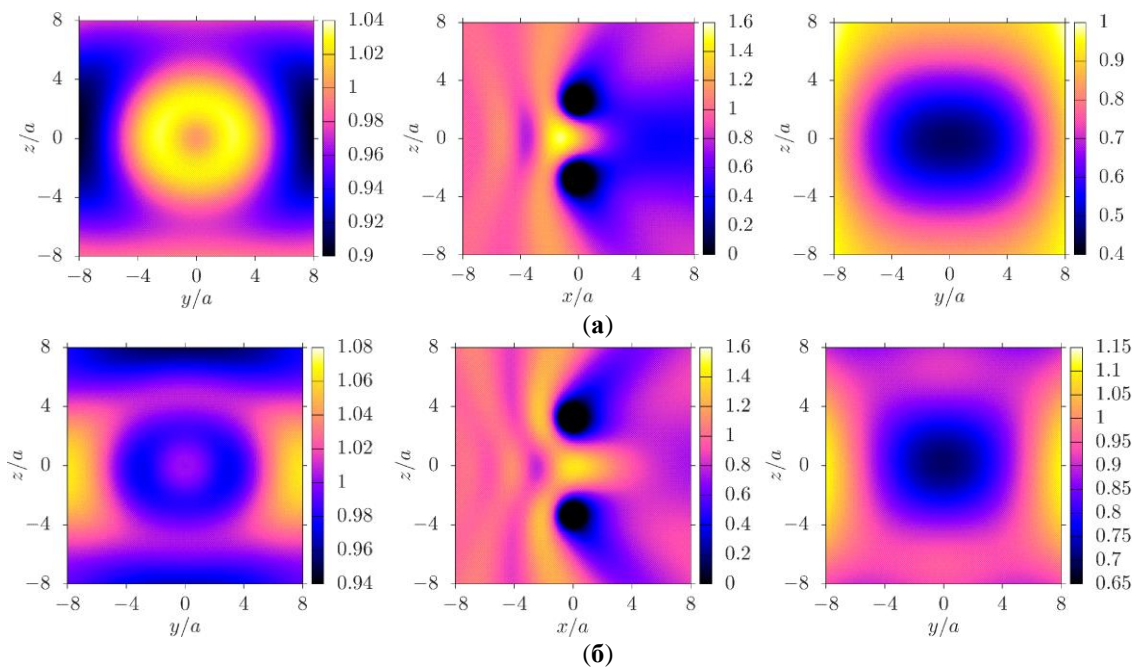


Рис. 4. Диаграммы распределения нормированного давления $|p/p_{in}|$ при наборе кодированных параметров $\bar{x}_{min} = (-1, 1, -1)$ (а) и $\bar{x}_{max} = (1, -1, 1)$ (б) в плоскостях $x = -d_s$ (слева), $y = 0$ (в центре), $x = d_s$ (справа) в случае двух воздушных пузырьков в воде для $(k_0 a_1)_0 = 1$.

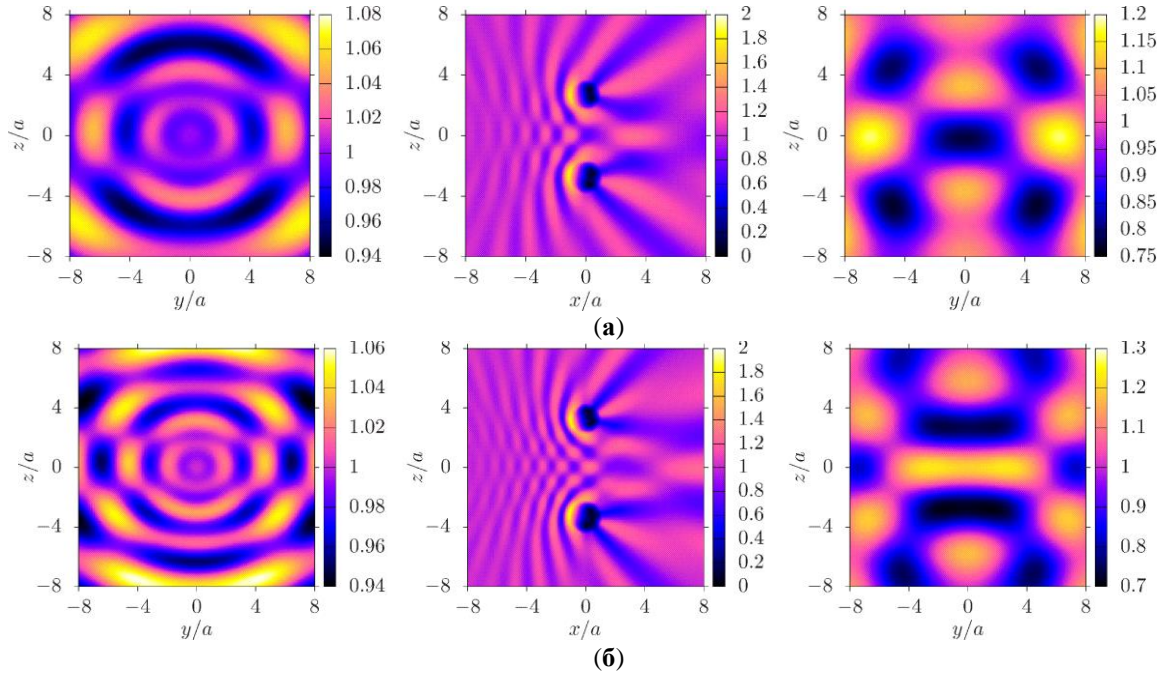


Рис. 5. Диаграммы распределения нормированного давления $|p/p_{in}|$ при наборе кодированных параметров $\bar{x}_{min} = (-1, 1, -1)$ (а) и $\bar{x}_{max} = (1, 1, 1)$ (б) в плоскостях $x = -d_s$ (слева), $y = 0$ (в центре), $x = d_s$ (справа) в случае двух капель воды в воздухе для $(k_0 a_1)_0 = 3$.

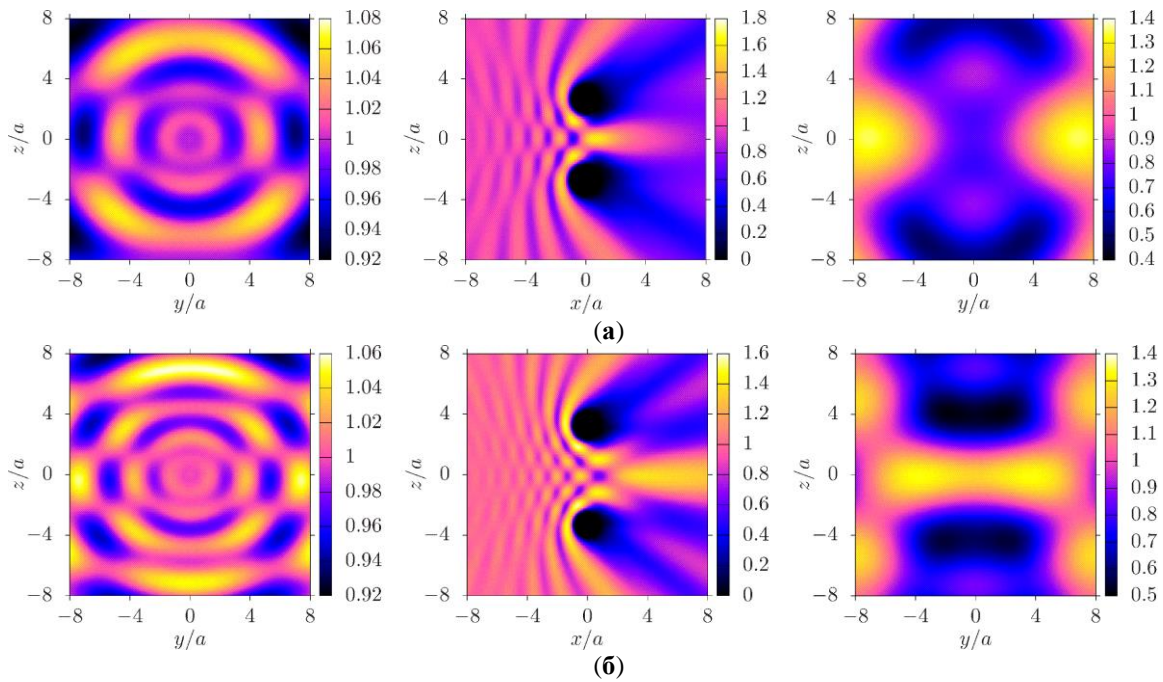


Рис. 6. Диаграммы распределения нормированного давления $|p/p_{in}|$ при наборе кодированных параметров $\bar{x}_{min} = (-1, 1, -1)$ (а) и $\bar{x}_{max} = (1, -1, 1)$ (б) в плоскостях $x = -d_s$ (слева), $y = 0$ (в центре), $x = d_s$ (справа) в случае двух воздушных пузырьков в воде для $(k_0 a_1)_0 = 3$.

Волны, прошедшие через систему, в случае пузырьков сильнее влияют на картину распределения давления в плоскости $x = d_s$, чем капли, причем чем выше волновой радиус, тем сильнее отклонение давления рассеянной волны от давления падающей волны – при $(k_0 a_1)_0 = 1$ для капель отклонение не превышает 8% и при $(k_0 a_1)_0 = 3$ –30%, а для пузырьков – может отклоняться в некоторых зонах фазовой плоскости до 60%.

Следует отметить, что картина распределения давления при $(k_0 a_1)_0 = 1$ в плоскости $y = 0$ для капель (рис. 3) согласуется с аналогичными диаграммами, полученными в работе [11] для жестких звукопроницаемых

сфер (комплексная полная проводимость для сферы $\sigma = 0$), а для пузырьков (рис. 4) – для мягких звукопроницаемых сфер (при $\sigma = 100k_0$). При $(k_0 a_1)_0 = 3$ зоны падения и кумуляции давления за сферами, благодаря наложению рассеянных волн, становятся более выраженными.

Заключение

В настоящем исследовании проведен анализ рассеяния акустической волны на паре звукопроницаемых сфер при падении сферической волны от монополюсного источника излучения с помощью численной методики, основанной на методе ОЦКП, которая была реализована для трехфакторного вычислительного эксперимента. Данная методика позволяет определить оптимальные параметры системы и подробно исследовать рассматриваемых целевые функции уже при найденных параметрах.

Анализ данных вычислительных экспериментов показал, что система с каплями является нечувствительной только для малого, а с пузырьками – только для большого волнового радиуса; фактор, связанный с расстоянием между центрами сфер является наиболее существенным, а связанный с отношением радиусов сфер – наименее; картина распределения давления сильно зависит от физических свойств сред. Фазовые диаграммы, построенные для найденных оптимальных параметров системы, показали зоны понижения и повышения давления, которые позволяют провести аналогию как со случаем пары непроницаемых сфер [11] (при $(k_0 a_1)_0 = 1$), так и со случаями одиночных сфер (пятно Пуассона и сферическая линза) [22], причем чем выше значение $(k_0 a_1)_0$, тем более выражены данные зоны.

Данная работа является теоретической, примененная численная методика позволяет подробно изучить механизм рассеяния на системах с малым числом рассеивателей, что в дальнейшем даст возможность полученные результаты использовать для обобщения и верификации методик расчета для систем с большим числом частиц при наличии их взаимодействия.

Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

ЛИТЕРАТУРА

1. Насибуллаева Э. Ш. Рассеяние звуковых волн на сферах: методы решения и основные характеристики (обзор) // Многофазные системы. 2021. Т. 16. № 3–4. С. 88–104. [Nasibullaeva E. Sh. Scattering of sound waves on spheres: methods and main characteristics (review) // Multiphase Systems. 2021. V. 16. No. 3–4. P. 88–104].
2. Kapodistrias G., Dahl P. H. Effects of interaction between two bubble scatterers // Journal of the Acoustic Society of America. 2000. V. 107. No. 6. P. 3006–3017.
3. Valier-Brasier T., Conoir J.-M. Resonant acoustic scattering by two spherical bubbles // Journal of the Acoustic Society of America. 2019. V. 145. No. 1. P. 301–311.
4. Epstein P. S., Carhart R. R. The absorption of sound in suspensions and emulsions // J Journal of the Acoustic Society of America. 1953. V. 25. No. 3. P. 553–565.
5. Allegra J. R., Hawley S. A. Attenuation of sound in suspensions and emulsions: theory and experiments // Journal of the Acoustic Society of America. 1972. V. 51. No. 5B. P. 1545–1564.
6. Володарский Е. Т., Малиновский Б. Н., Туз Ю. М. Планирование и организация измерительного эксперимента. Киев: Высшая школа, 1987. 280 с. [Volodarskiy E. T., Malinovsky B. N., Tuz Yu. M. Planning and organizing a measurement experiment. Kyiv: Vysshaya Shkola, 1987. 280 p.].
7. Петков А. А. Ортогональное центральное композиционное планирование в технике и электрофизике высоких напряжений: учеб.-метод. пособие. Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. 61 с. [Petkov A. A. Orthogonal central compositional planning in high-voltage engineering and electrophysics: study guide. Kharkov: NTU “KhPI”, 2007. 61 p.].
8. Реброва И. А. Планирование эксперимента: учеб. пособие. Омск: СибАДИ, 2010. 105 с. [Rebrova I. A. Experimental planning: tutorial. Omsk: SibADI, 2010. 105 p.].
9. Казаков А. В. Планирование эксперимента и измерение физических величин: учеб. пособие. Пермь: изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2014. 89 с. [Kazakov A. V. Experimental planning and measurement of physical quantities: textbook. Perm: Publishing House of Perm National Research Polytechnic University, 2014. 89 p.].
10. Oyejola B. A., Nwanya J. C. Selecting the Right Central Composite Design // International Journal of Statistics and Applications. 2015. V. 5. No. 1. P. 21–30.
11. Насибуллаева Э. Ш. Численный анализ рассеяния волны на паре звукопроницаемых сфер методом ортогонального центрального композиционного планирования // Многофазные системы. 2025. Т. 20. №3. С. 116–128. [Nasibullaeva E. Sh. Numerical analysis of wave scattering by a pair of soundproof spheres by orthogonal central compositional design method // Multiphase Systems. 2025. V. 20. No. 3. P. 116–128].
12. Насибуллаева Э. Ш. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительные технологии. 2022. Т. 27. №2. С. 19–36. [Nasibullaeva E. Sh. Simulation of acoustic scattering from a set of sound-permeable spheres in 3D space // Computational Technologies. 2022. V. 27. No. 2. P. 19–36].
13. Насибуллаева Э. Ш. Численный анализ многократного рассеяния акустической волны на множестве звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15. №4. С. 383–398. [Nasibullaeva E. Sh. Numerical analysis of multiple scattering of an acoustic wave on a set of sound-permeable spheres in 3D space // Computational Continuum Mechanics. 2022. V. 15. No. 4. P. 383–398].
14. Gumerov N. A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // Journal of the Acoustic Society of America. 2002. V. 112. No. 6. P. 2688–2701.
15. Skaropoulos N. C., Yagridou H. D., Chrissoulidis D. P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // Journal of the Acoustic Society of America. 2003. Vol. 113. No. 6. P. 3001–3011.
16. Владимирова В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с. [Vladimirova V. S. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1981. 512 p.].
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с. [Korn G., Korn T. Handbook of mathematics for scientists and engineers. Moscow: Nauka, 1974. 832 p.].

18. Насибуллаева Э. Ш. Численный анализ акустического рассеяния от звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии // Вестник УГАТУ. 2021. Т. 25. №2(92). С. 93–101. [Nasibullaeva E. Sh. Numerical analysis of acoustic scattering from sound-permeable spheres under external influence // Vestnik UGATU. 2021. V. 25. No. 2(92). P. 93–101].
19. Блохин А. В. Теория эксперимента. Курс лекций. В 2-х ч. Ч. 2. Минск: Белорусский государственный университет, 2002. 67 с. [Blokhin A. V. Theory of experiment. Lecture course. In 2 parts. Pt. 2. Minsk: Belarusian State University, 2002. 67 p.].
20. Доерфель К. Статистика в аналитической химии. М.: Мир, 1969. 247 с. [Doerfel K. Statistics in analytical chemistry. Moscow: Mir, 1969. 247 p.].
21. Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976. 254 с. [Adler Yu. P., Markova E. V., Granovsky Yu. V. Experimental planning in the search for optimal conditions. Moscow: Nauka, 1976. 254 p.].
22. Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацьпура В. Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с. [Grinchenko V. T., Vovk I. V., Mat-sypura V. T. Fundamentals of Acoustics. Kyiv: Naukova Dumka, 2009. 867 p.].

Поступила в редакцию 10.11.2025 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2026.1.2

**NUMERICAL ANALYSIS OF THE ACOUSTIC WAVE SCATTERING MECHANISM
ON TWO SOUND-PERMEABLE SPHERES**

© E. Sh. Nasibullaeva*

*Mavlyutov Institute of Mechanics,
Ufa Federal Research Center of RAS
71 Oktyabrya pr., 450054 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

**Email: elvira@anrb.ru*

An analysis of acoustic wave scattering by two sound-permeable spheres exposed to a monopole radiation source is conducted. The analysis was performed using a numerical technique based on the orthogonal central compositional design method. This technique was implemented for a three-factor computational experiment, where one physical and two geometric parameters of the system were selected as factors. The objectives of the study were to identify factors whose changes significantly affect the entire system; to find the values of the variable parameters for which the objective function takes optimal (minimum and maximum) values; and to study the system at optimal parameter values. It is shown that the system with droplets is insensitive only for small wave radii, while the system with bubbles is insensitive only for large wave radii. Pressure distribution diagrams constructed for optimal system parameters made it possible to identify zones of pressure increase and decrease, which are highly dependent on the physical properties of the media.

Keywords: acoustic scattering, sound-permeable sphere, computational experiment, regression analysis, orthogonal central compositional design method, monopole radiation source.

*Received 10.11.2025.***Об авторе/About the author****НАСИБУЛЛАЕВА Эльвира Шамилевна**

Канд. физ.-мат. наук, доц., ст. науч. сотр. лаб. механики
многофазных систем.

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова, УФИЦ РАН.

Email: elvira@anrb.ru

Web of Science ResearcherID AAG-6692-2020.

NASIBULLAEVA Elvira Shamilevna

PhD of Phys. and Math. Sci., Senior Researcher
of Lab. of Mechanics of Multiphase Systems.

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Researcher
Center of RAS.

Email: elvira@anrb.ru

ORCID ID 0000-0003-1242-9800.

Web of Science ResearcherID AAG-6692-2020.

Scopus Author ID 9236521300.