УДК 539.3: 669.046.4: 517.977
DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2025.4.3

ОПТИМАЛЬНЫЙ НАГРЕВ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ И ОГРАНИЧЕНИЙ НА ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЯ

© Н. Д. Морозкин*, В. И. Ткачев, Ю. Н. Морозкин

Уфимский университет науки и технологий
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

**Email: MorozkinND@mail.ru*

В работе рассматривается задача оптимального осесимметричного нагрева неограниченной пластины с учетом возникающих термонапряжений. Учитывается зависимость пределов прочности и коэффициента теплопроводности от температуры. Для решения полученной нелинейной задачи применяется метод последовательной линеаризации. На основе разработанного подхода предложен алгоритм выбора оптимального по быстродействию температурного режима, удовлетворяющего наложенным ограничениям. Приведены примеры расчетов, демонстрирующие эффективность алгоритма. Полученные результаты могут быть использованы при разработке технологий высокотемпературного нагрева.

Ключевые слова: *оптимальный нагрев, термонапряжения, пределы прочности, фазовые ограничения, время быстродействия.*

Введение

Вопросы управления процессами нагрева с учетом напряженного состояния материала до настоящего времени освещены в научной литературе недостаточно, несмотря на их важность. В большинстве исследований рассматриваются постановки без ограничений или с допущением постоянства теплофизических коэффициентов и линейной зависимости пределов прочности от температуры [1–2].

Настоящая работа ориентирована на случай, когда пределы прочности материала при сжатии и растяжении существенно зависят от температуры. В условиях высокотемпературного нагрева этот фактор становится критическим, т.к. пределы прочности могут изменяться в несколько раз [3]. Кроме того, учитывается зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, что также существенно влияет на результаты расчетов. Последний фактор приводит к нелинейному уравнению состояния. Как и в работе [4], исходное нелинейное уравнение теплопроводности линеаризуется и его решение находится методом последовательных приближений. На каждой итерации решение линеаризованного уравнения выписывается с использованием интегрального преобразования Фурье. Полученная задача оптимального управления решается с помощью алгоритма, изложенного в работе [5]. Приведены результаты расчетов.

Постановка задачи

Процесс осесимметричного внешнего нагрева неограниченной пластины описывается следующими уравнениями:

$$c\rho\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right), x\in(0,\bar{x}), t\in(0,\bar{t}), 0<\bar{t}<\infty \tag{1}$$

$$T(x,0)=p=const, x\in[0,\bar{x}] \tag{2}$$

$$\lambda(T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\bar{x}}=\alpha\big(v(\tau)-T(x,t)\big)\Big|_{x=\bar{x}}\ t\in[0,\bar{t}] \tag{3}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0, t\in[0,\bar{t}], \tag{4}$$

где t – время, x – пространственная переменная в $T(x,t)$ – температура, a – коэффициент температуропроводности, α – коэффициент теплообмена, $\lambda(T)$ – коэффициент теплопроводности, $v(t)$ – температура греющей среды (управление):

$$v(t)\in V, V=\{v=v(t), 0\le v^-\le v(t)\le v^+, v(t)\in L_2[0,\bar{t}]\}. \tag{5}$$

Будем предполагать, что коэффициент теплопроводности

$$\lambda(T)>0 \text{ и } 0<\beta_1\le\lambda(T)\le\beta_2. \tag{6}$$

В работе рассматриваются материалы, склонные к хрупкому разрушению. В процессе нагрева тело испытывает как растягивающие, так и сжимающие напряжения. Согласно исследованиям [1; 6], при осесимметричном нагреве максимальные растягивающие напряжения формируются на оси пластины, в то время как сжимающие достигают наибольших значений на ее поверхности. Если предположить, что края пластины жестко защемлены, ограничения. В предположении, что модуль упругости E и коэффициент линейного расширения α_T постоянны, а края пластины жестко защемлены в квазистатической постановке задача термоупругости решается аналитически [6].

$$\frac{\alpha_T E}{1-\nu}\left(-T(0,t)+\frac{1}{\bar{x}}\int_0^{\bar{x}} T(x,t)dx\right) \le \sigma_p\big(T(0,t)\big). \quad (7)$$

$$\frac{\alpha_T E}{1-\nu}\left(T(\bar{x},t)+\frac{1}{\bar{x}}\int_0^{\bar{x}} T(x,t)dx\right) \le \sigma_c\big(T(\bar{x},t)\big). \quad (8)$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, σ_c и σ_p – соответственно пределы прочности на сжатие и растяжение.

Задача 1. Требуется найти управление $v^0(t) \in V$, которое при выполнении с заданной точностью $\varepsilon_1 \ge 0$ неравенств *(7), (8)* переведет систему *(1), (3), (4)* из положения *(2)* в положение $\bar{T}(x)$ с фиксированной точностью $\varepsilon_2 \ge 0$ за минимальное время t^0, $0 \le t^0 \le \bar{t}$, т.е.

$$\int_0^{\bar{x}} [T[x,t^0]-\bar{T}(x)]^2 dx \le \varepsilon_2. \quad (9)$$

Линеаризация. Решение линеаризованной системы уравнений

Будем искать решение системы уравнений *(1)–(4)*, используя метод последовательных приближений [4]. Рассмотрим итерационный процесс:

$$c\rho\frac{\partial T_k(x,t)}{\partial x} - \lambda_0\frac{\partial^2 T_k(x,t)}{\partial x^2} = \lambda_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\lambda\frac{(T_{k-1}(x,t))}{\lambda_0}-1\right)\frac{\partial T_{k-1}(x,t)}{\partial x}\right]; \quad (10)$$

$$T_k(x,t) = p; \quad (11)$$

$$\left[\lambda_0\frac{\partial T_{k-1}(x,t)}{\partial x} - \alpha\big(v(t)-T_k(x,t)\big)\right]_{x=\bar{x}} = \left[\Big(\lambda_0-\lambda\big(T_k(x,t)\big)\Big)\frac{\partial T_{k-1}(x,t)}{\partial x}\right]_{x=\bar{x}}; \quad (12)$$

$$\left.\frac{\partial T_k(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; \quad (13)$$

где

$$\lambda_0 = \frac{\beta_1+\beta_2}{2}. \quad (14)$$

Аналогично работе [4] можно показать, что последовательность $\{T_k(x,t)\}, k = 1,2,\ldots$, сходится к решению $T(x,t)$ системы уравнений *(1)–(4)* в пространстве $W_2^{1,0}$.

Для удобства дальнейших расчетов введем следующие безразмерные переменные:

$l = \frac{x}{\bar{x}}$, $\theta = \alpha_T(T-p)$, $\tau = \frac{\lambda_0 t}{c\rho\bar{x}^2}$, $Bi = \frac{\alpha\bar{x}}{\lambda_0}$, $\bar{\theta} = \alpha_T(\bar{T}-p)$, $u = \alpha_T(v-p)$, $\sigma_c^* = \frac{(1-\nu)\sigma_c}{E}$, $\sigma_p^* = \frac{(1-\nu)\sigma_p}{E}$, $u^- = \alpha_T(v-p)$, $u^+ = \alpha_T(v^*-p)$.

В этих переменных система уравнений *(10)–(13)* запишется в виде:

$$\frac{\partial\theta_k}{\partial\tau} - \frac{\partial^2\theta_k}{\partial l^2} = \frac{\partial}{\partial l}\left[\left(\frac{\lambda(\theta_{k-1})}{\lambda_0}-1\right)\frac{\partial\theta_{k-1}}{\partial l}\right]; \quad (15)$$

$$\theta_k(r,0) = 0; \quad (16)$$

$$\left.\frac{\partial\theta_k(l,t)}{\partial l}\right|_{l=1} = Bi[u(\tau)-\theta_k(1,\tau)] + \frac{\lambda_0-\lambda\big(\theta_{k-1}(1,r)\big)}{\lambda_0}\frac{\partial\theta_{k-1}(1,\tau)}{\partial l}; \quad (17)$$

$$\left.\frac{\partial\theta_k(l,\tau)}{\partial l}\right|_{l=0} = 0. \quad (18)$$

Ограничения на термонапряжения *(7), (8)* запишутся в виде неравенств:

$$-\theta_k(0,\tau) + \int_0^1 \theta_k(l,\tau)\,dl \le \sigma_p^*\big(\theta_k(0,\tau)\big); \quad (19)$$

$$\theta_k(1,\tau) - \int_0^1 \theta_k(l,\tau)\,dl \le \sigma_c^*\big(\theta_k(0,\tau)\big). \quad (20)$$

Решение линейных уравнений *(15)–(18)* будем искать с помощью интегрального преобразования Фурье [7]:

$$\theta_F(\mu,\tau) = \int_0^1 \theta(l,\tau)\cos(\mu,l)dl. \quad (21)$$

Применив к обеим частям уравнения *(15)* интегральное преобразование *(21)* и выбрав μ как корень уравнения

$$\mu\sin(\mu) - Bi\cos(\mu) = 0, \quad (22)$$

с учетом граничных условий *(17), (18)* уравнение *(15)* в изображениях запишется в виде

$$\frac{\partial\theta_F(\mu,\tau)}{\partial\tau} = Bi\cos\mu\,(u(\tau)+I^{k-1}) - \mu^2\theta_F(\mu,\tau), \quad (23)$$

где

$$I^{k-1} = \int_0^1\left(\frac{\lambda(\theta_{k-1})}{\lambda_0}-1\right)\frac{\partial\theta_{k-1}}{\partial l}\frac{\sin(\mu l)}{\sin\mu}dl.$$

Формула обращения вытекает из теории рядов Фурье [7] и в рассматриваемом случае с учетом *(23)* записывается в виде

$$\theta_k(l,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\, x_n^k(u,\tau)\cos(\mu_n l). \quad (24)$$

где $\mu_n, n = 1,2,\ldots$ – корни уравнения *(22)*.

$$D_n = \frac{2\,Bi}{(\mu_n^2+Bi+Bi^2)\sin(\mu_n)}. \quad (25)$$

$x_n^k(u,\tau), n = 1,2,\ldots$ – компонента решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx_n^k}{d\tau} = -\mu_n^2 x_n^k + \mu_n(u+I_n^{k-1}),\ x_n^k(0) = 0, n = 1,2,\ldots \quad (26)$$

Здесь

$$I_n^{k-1} = \int_0^1\left(\frac{\lambda(\theta_{k-1})}{\lambda_0}-1\right)\frac{\partial\theta_{k-1}}{\partial l}\frac{\sin(\mu l)}{\sin\mu}dl. \quad (27)$$

Для заданного конечного безразмерного распределения температуры $\bar{\theta}(l)$ справедливо разложение

$$\bar{\theta}(l) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|\cos(\mu_n l)\|^2} g_n \cos(\mu_n l) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n g_n \cos(\mu_n l)}{\sin \mu_n}, \qquad (28)$$

поскольку система функций $\{\cos(\mu_n l)\}_{n=1}$ ортогональна и полна в $L_2[0,1]$. Здесь

$$g_n = \int_0^1 \bar{\theta}(l) \cos(\mu_n l)\, dl.$$

С учетом конкретного вида $\theta_k(l,t)$ в *(24)* неравенства *(19)*, *(20)* можно переписать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}\, x_n^k \le \sigma_p^* (\sum_{n=1}^{\infty} D_n\, x_n^k), \qquad (29)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}\, x_n^k \le \sigma_c^* (\sum_{n=1}^{\infty} D_n\, x_n^k \cos \mu_n), \qquad (30)$$

где $c_{1n} = D_n \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - 1\right), c_{2n} = D_n \left(\cos \mu_n - \frac{\sin \mu_n}{\mu_n}\right)$.

Конечномерная аппроксимация

Ограничившись в соотношении *(24)* первыми N членами ряда, систему *(26)* можно записать в виде

$$\frac{dX^N}{d\tau} = -A^N X^N + B^N u + I^N, X^N(0) = 0, \qquad (31)$$

где $X^N = (x_1^k, \dots, x_n^k), A^N = (\mu_1^2, \dots, \mu_n^2), B^N = (\mu_1, \dots, \mu_n), I^N = (\mu_1 I_1^{k-1}, \dots, \mu_n I_n^{k-1})^T$.

Ограничения *(29)*, *(30)* перепишутся в виде

$$C^N X^N \le F^N, \qquad (32)$$

где

$$C^N = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \dots & c_{1N} \\ c_{2N} & c_{22} \dots & c_{2N} \end{pmatrix}, F^N = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},$$

$$F_1 = \sigma_p^* (\sum_{n=1}^{\infty} D_n\, x_n^k), F_2 = \sigma_c^* (\sum_{n=1}^{\infty} D_n\, x_n^k \cos \mu_n). \qquad (33)$$

В результате будем решать приведенную ниже задачу.

Задача 2. Найти управление $u^0(\tau) \in U$, при котором на решениях системы *(31)* за минимальное время τ^0 будет достигнуто выполнение неравенства

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{D_n [\sin \mu_n x_n^k(u^0, \tau^0) - g_n]^2}{Bi\ \sin \mu} \le \varepsilon_2,$$

при условии, что с точностью ε_1 на промежутке $[0, \tau^0]$ будет выполнено неравенство *(32)*.

Здесь $U = \{u = u(\tau), 0 \le \bar{u} \le u^+, u(\tau) \in L_2[0, \bar{\tau}]\}$.

Вычислительный эксперимент

Поставленная задача 2 на каждой итерации решалась с помощью алгоритма, предложенного в работе [5].

Таблица 1

Исходные данные

Параметр	Наименование параметра	Значение	Ед. измерения
ρ	плотность материала	8 130	кг/м^3
c	удельная теплоемкость	368	Дж/кг · ℃
$\bar{x}$	половина толщины пластины	0,23	м
α	коэффициент теплообмена	200	Вт/(м^2 · ℃)
p	начальная температура	20	℃
$\bar{T}$	заданное конечное распределение	920	℃
v^-	минимальное значение температуры греющей среды	800	℃
v^+	максимальное значение температуры греющей среды	1 600	℃
α_T	коэффициент линейного расширения	$0{,}18 \cdot 10^{-4}$	1/℃
E	модуль упругости	$145 \cdot 10^5$	Па
ν	коэффициент Пуассона	0,3	безразмерная величина

Таблица 2

Зависимость пределов прочности от температуры

Наименование параметра	Ед. измерения	Значения				
Температура	℃	20	975	1 050	1 100	1 150
Предел прочности на сжатие	мПа	1 100	580	470	310	210
Предел прочности на растяжение	мПа	680	540	370	200	140

Таблица 3

Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры

Температура	℃	20	200	500	600	700	800	900	1 000
Коэффициент теплопроводности	Вт/(м^2 · ℃)	10,05	15,07	18,84	20,51	22,19	24,28	26,38	28,05

После перехода к безразмерным величинам данные в *табл.* 2 аппроксимировалась функциями:

$$\sigma_c^* = \left(-0,023e^{0,003303\theta} + 0,747\right);$$

$$\sigma_{\text{р}}^* = \left(-0,003e^{0,0046\theta} + 0,476\right);$$

а данные *табл.* 3 – линейной функцией

$$\lambda(\theta) = 10,68 + 9,74\theta.$$

Линеаризованная задача решалась при различных значениях N начиная с N = 3. При $N \geq 6$ изменение времени быстродействия стало несущественным и дальнейшие расчеты проводились при N = 6. Результаты расчетов представлены на *рис.*

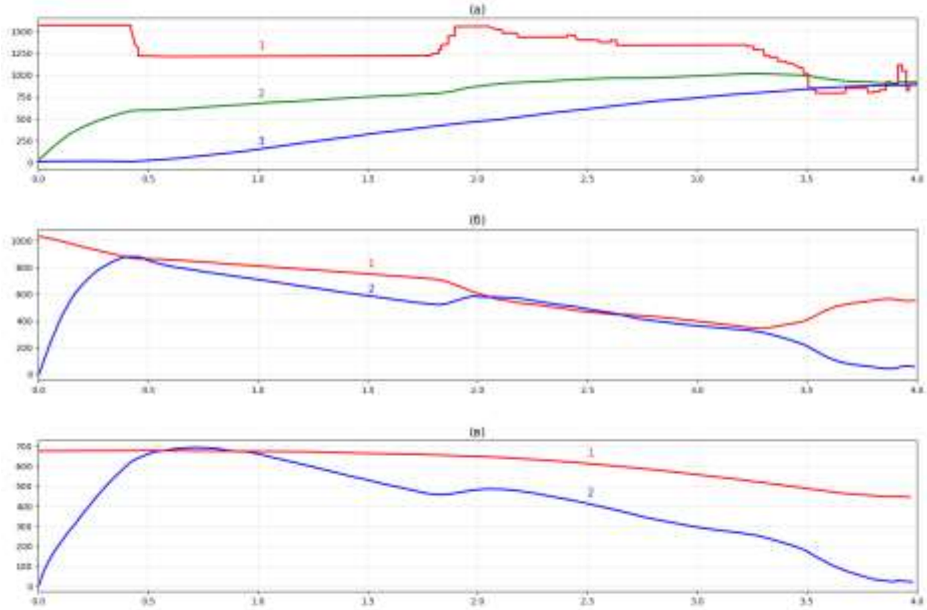

Рис. 1. Результаты расчетов.

На графике а) рисунка показаны временные изменения оптимального управления (кривая 1), температуры поверхности (кривая 2) и температуры центра пластины (кривая 3) при оптимальном режиме нагрева. Оптимальная продолжительность нагрева составила 3,98 ч. На графике б) приведены временные зависимости предела прочности при сжатии (кривая 1) и сжимающих термонапряжений (кривая 2), рассчитанные в условиях оптимального управления. Соответственно, на графике в) представлены изменения предела прочности на растяжение (кривая 1) и растягивающих термонапряжений (кривая 2). Из анализа графиков б) и в) следует, что скорость нагрева в основном ограничивается величиной сжимающих термонапряжений. При этом в научных исследованиях традиционно основное внимание уделялось растягивающим напряжениям.

Заключение

В статье предложен алгоритм оптимизации осесимметричного нагрева неограниченной пластины с учетом зависимости пределов прочности и коэффициента теплопроводности от температуры. Разработанный алгоритм позволяет формировать режимы нагрева, обеспечивающие максимальную скорость процесса при соблюдении ограничений на термонапряжения. Приведенный пример подтвердил эффективность предложенного подхода и его применимость для практических задач высокотемпературной обработки материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. Киев: Наукова думка, 1988. [Vigak V. M. Control of thermal stresses and displacements. Kyiv: Naukova Dumka, 1988].
2. Морозкин Н. Д., Морозкин Н. Н. Оптимизация процессов внешнего нагрева с учетом ограничений на термонапряжения и на максимальную температуру // Вестник Башкирского университета. 2012. Т. 17. №1. С. 5–9. [Morozkin N. D., Morozkin N. N. Optimization of external heating processes taking into account thermotensions and maximal temperature restrictions // Bulletin of Bashkir University. 2012. Vol. 17. No.1. P. 5–9].
3. Морозкин Н. Д. Оптимизация высокотемпературного индукционного нагрева сплошного цилиндра с учетом ограничений на термонапряжения // Электричество. 1995. №5. С. 56–60. [Morozkin N. D. Optimization of high-temperature induction heating of a solid cylinder taking into account limitations on thermal stress // Electrichestvo. 1995. No. 5. P. 56–60].
4. Голичев И. И. Решение некоторых задач для параболических уравнений методом последовательных приближений. Уфа: БНЦ Уро АН СССР, 1989. [Golichev I. I. Solution of some problems for parabolic equations by the method of successive approximations. Ufa: Bashkir Research Center of Ural Branch of the USSR Academy of Sciences, 1989].
5. Морозкин Н. Д., Ткачев В. И., Морозкин Н. Н. Об одном алгоритме решения задачи быстродействия в линейных системах с выпуклыми ограничениями на фазовые переменные и управление // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27. №2.

С. 127–142. [Morozkin N. D., Tkachev V. I., Morozkin N. N. About an algorithm for solving the speed problem in linear systems with convex restrictions on phase variables and control // Middle Volga Mathematical Society Journal. 2025. Vol. 27. No. 2. P. 127–142].

6. Филоненко-Бородич М. И. Механические теории прочности. М.: МГУ, 1961. [Filonenko-Borodich M. I. Mechanical theories of strength. Moscow: Moscow State University, 1961].

7. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1985. [Kartashov E. M. Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids. Textbook for universities. Moscow: Vysshaya Shkola, 1985].

Поступила в редакцию 16.10.2025 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2025.4.3

OPTIMAL HEATING SPEED FOR AN UNBOUNDED PLATE, TAKING INTO ACCOUNT THERMAL STRESS CONSTRAINTS

© N. D. Morozkin*, V. I. Tkachev, Yu. N. Morozkin

Ufa University of Science and Technology
32 Zaki Validi st., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Email: MorozkinND@mail.ru

This paper examines the problem of optimal axisymmetric heating of an infinite plate, taking into account the resulting thermal stresses. The dependence of the ultimate strength and thermal conductivity on temperature is considered. A sequential linearization method is used to solve the resulting nonlinear problem. Based on the developed approach, an algorithm is proposed for selecting the optimal temperature regime in terms of response time, satisfying the imposed constraints. Example calculations are provided demonstrating the algorithm's effectiveness. The obtained results can be used in the development of high-temperature heating technologies.

Keywords: optimal heating, thermal stresses, ultimate strength, phase constraints, response time.

Received 16.10.2025.

Об авторах / About the authors

МОРОЗКИН Николай Данилович
д.ф.-м.н., профессор,
научный руководитель Института информатики, математики и робототехники
Уфимского университета науки и технологий
Email: MorozkinND@mail.ru

MOROZKIN Nikolay Danilovich
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,
Scientific Director of the Institute of Computer Science, Mathematics and Robotics,
Ufa University of Science and Technology
Email: MorozkinND@mail.ru

ТКАЧЕВ Владислав Игоревич
к.ф.-м.н.,
доцент кафедры математического и компьютерного моделирования
Уфимского университета науки и технологий
Email: tvi-vlad@mail.ru

TKACHEV Vladislav Igorevich
Ph.D. in Phys.-Math,
Associate Professor of the Department of Mathematical and Computer Modeling,
Ufa University of Science and Technology
Email: tvi-vlad@mail.ru

МОРОЗКИН Юрий Николаевич
к.ф.-м.н., доцент,
доцент кафедры финансов и налогового регулирования
Уфимского университета науки и технологий
Email: MorozkinYN@mail.ru

MOROZKIN Yuri Nikolaevich
Ph.D. in Phys.-Math, Docent,
Associate Professor of the Department of Finance and Tax Regulation,
Ufa University of Science and Technology
Email: MorozkinYN@mail.ru