

УДК 534.1+519.6

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2026.1.3

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ВСТАВКОЙ

© Э. М. Нусратуллин, Л. Р. Нусратуллина*,

*Уфимский университет науки и технологий
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Email: mardliliya@yandex.ru

В статье рассматривается методика расчета собственных частот изгибных колебаний стержня с абсолютно жесткой промежуточной вставкой, базирующаяся на методе алгебраических полиномов пятой степени. Стержень моделируется как составная система из трех последовательно соединенных участков. Два крайних участка (корневой и верхний) представляют собой криволинейные участки стержня с изгибной жесткостью EI и погонной массой ρA и описываются дифференциальным уравнением колебаний четвертого порядка. Средний участок, соответствующий зоне расположения вставки, моделируется как абсолютно жесткий, недеформируемый и описывается прямой. Для верификации численного метода решена эталонная задача, имеющая точное аналитическое решение. Показано, что при достаточной густоте сетки разбиения длины стержня метод обеспечивает совпадение расчетных значений с тестовым решением вплоть до шестого знака после запятой.

Ключевые слова: *стержень, стержневая модель, стержень с абсолютно жесткой вставкой, частоты собственных колебаний, метод алгебраических полиномов пятой степени.*

Введение

Для анализа сложных конструкций авиа-, машино- и судостроительной техники применяется стержневые расчетные схемы, обеспечивающая достаточную точность при определении собственных частот при минимальных вычислительных затратах. В статье рассматривается стержневая модель, которая может служить упрощенной расчетной схемой лопатки газотурбинного двигателя с бандажной полкой.

Бандажные полки на лопатках ГТД выполняют важную функциональную роль. Они локально увеличивает изгибную жесткость пера лопатки в зоне своего расположения, что приводит к сдвигу спектра собственных частот: низшие изгибные частоты возрастают, обеспечивая отстройку от резонансных частот и снижая вероятность резонансного отклика. В связи с этим расчет частот собственных колебаний лопатки с бандажной полкой остается актуальной задачей при проектировании ГТД.

Современный подход к решению подобных задач предполагает иерархическую стратегию моделирования: на первом этапе выполняется предварительная оценка спектра частот с использованием стержневой модели [1–3], в которой лопатка представляется как стержень с заданными упруго-геометрическими характеристиками; на втором этапе проводится детализированный трехмерный анализ, например методом конечных элементов в программных комплексах типа ANSYS [4–6], SolidWorks и т.д. Несмотря на удобство коммерческих конечно-элементных пакетов, их результаты не всегда обеспечивают высокую точность даже при увеличении густоты сетки [7–8]. Ключевыми преимуществами стержневого подхода в рамках иерархической стратегии являются минимальные вычислительные затраты, позволяющие проводить многовариантные исследования, простота изменения геометрических характеристик и достаточная для инженерной оценки точность определения собственных частот.

В статье разработан численный метод расчета собственных частот колебаний стержня постоянного сечения с абсолютно жесткой вставкой. Метод основан на аппроксимации функций прогиба на каждом участке стержня алгебраическими полиномами пятой степени [9–10]. Верификация метода на тестовых задачах с известным аналитическим решением подтвердила его высокую точность – результаты совпадают с эталонными значениями до шестого знака после запятой.

Основные положения метода алгебраических полиномов пятой степени при расчете частот изгибных колебаний стержня с абсолютно жесткой промежуточной вставкой

Собственные частоты поперечных колебаний стержней традиционно определяются путем аналитического или численного решения дифференциального уравнения колебаний четвертого порядка [3]:

$$\frac{\partial}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

- $v = v(z, t)$ – поперечное перемещение точек оси стержня в зависимости от продольной координаты z и времени t ;
- ρA – погонная масса стержня, зависящая от координаты z ;
- $E = \text{const}$ – модуль упругости материала;
- $I = I(z)$ – осевой момент инерции поперечного сечения, являющийся функцией от z .

Стержень с абсолютно жесткой вставкой моделируется как составная система, состоящая из трех последовательно соединенных участков с длинами l_1, s, l_2 , где $l_1 + s + l_2 = l$.

Два крайних участка – корневой ($z \in [0; l_1]$) и верхний ($z \in [s; l]$) описываются уравнением поперечных колебаний (1). Средний участок ($z \in [l_1; s]$), соответствующий зоне расположения вставки, моделируется как абсолютно жесткий и недеформируемый. Его ось аппроксимируется прямой линией (рис. 1).

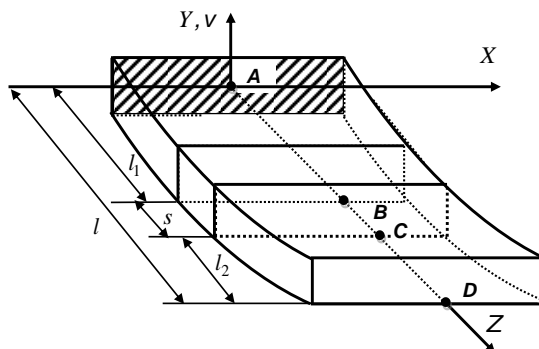


Рис. 1. Стержень с бандажной полкой.

Решение дифференциального уравнения (1) на участке $[0; l_1]$ будем искать в виде:

$$v(z, t) = V_{AB}(z) \sin \omega t, \tag{2}$$

а на участке $[s; l]$:

$$v(z, t) = V_{CD}(z) \sin \omega t, \tag{3}$$

где $V_{AB}(z), V_{CD}(z)$ – формы колебаний, а ω – круговая частота собственных колебаний.

При постоянных значениях модуля упругости $E = \text{const}$, осевого момента инерции $I = \text{const}$ и постоянном сечении уравнение (1) записывается в виде [3]:

$$EI \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} - \rho A \omega^2 V = 0. \tag{4}$$

Для удобства введем обозначение $\omega = \sqrt{\frac{k^4 EI}{\rho A}}$. В результате уравнение (4) примет вид:

$$\frac{\partial^4 V}{\partial z^4} - k^4 V = 0, \tag{5}$$

решив которое, мы получим спектр частот колебаний $\omega_1, \omega_2, \dots$

Для применения метода алгебраических полиномов пятой степени [9–10] на отрезках AB и CD строятся сетки Δ_{AB} и Δ_{CD} :

$$\begin{aligned} \Delta_{AB} : 0 &= z_1 < z_2 < \dots < z_N = l_1, \\ \Delta_{CD} : s &= z'_1 < z'_2 < \dots < z'_N = l, \end{aligned} \tag{6}$$

имеющие по N узлов, с $h_{AB} = \frac{l_1}{N-1}, h_{CD} = \frac{l_2}{N-1}, i = \overline{1, N-1}$.

На каждом из отрезков сеток рассматриваются функции $P_{5_{AB}}^{(i)}(z)$ и $P_{5_{CD}}^{(i)}(z)$, являющиеся полиномами пятой степени:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{5AB}^{(i)}(z) = \sum_{\alpha=0}^5 a_{\alpha}^{(i)} (z - z_i)^{\alpha}, \\ z \in [z_i, z_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1}. \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{P}_{5CD}^{(i)}(z) = \sum_{\alpha=0}^5 \beta_{\alpha}^{(i)} (z - z'_i)^{\alpha}, \\ z \in [z'_i, z'_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1}. \end{cases} \quad (7)$$

Полиномы $\mathbf{P}_{5AB}^{(i)}(z)$ и $\mathbf{P}_{5CD}^{(i)}(z)$ задаются своими коэффициентами $a_{\alpha}^{(i)}, \beta_{\alpha}^{(i)}, \alpha = \overline{0, 5}, i = \overline{1, N-1}$, общее число которых равно $12(N-1)$.

Для удобства искомые коэффициенты полиномов выпишем в вектор-столбец \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = (q_k, k = \overline{1, 12(N-1)})^T. \quad (8)$$

Между смежными отрезками вводятся условия стыковки, обеспечивающие совпадение значений полиномов и их производных до четвертого порядка включительно в узлах разбиения сеток Δ_{AB} и Δ_{CD} :

$$\frac{d^s \mathbf{P}_{5AB}^{(i-1)}(z_i)}{dz^s} = \frac{d^s \mathbf{P}_{5AB}^{(i)}(z_i)}{dz^s}, \quad \frac{d^s \mathbf{P}_{5CD}^{(i-1)}(z'_i)}{dz^s} = \frac{d^s \mathbf{P}_{5CD}^{(i)}(z'_i)}{dz^s}, \quad s = \overline{0, 4}, \quad i = \overline{2, N-1}. \quad (9)$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} \frac{d^s \mathbf{P}_{5AB}^{(i)}(z)}{dz^s} = \mathbf{R}_{sAB}^{(i)}(z), \\ i = \overline{1, N-1}, \quad s = \overline{0, 4}, \quad z \in [z_i, z_{i+1}], \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d^s \mathbf{P}_{5CD}^{(i)}(z)}{dz^s} = \mathbf{R}_{sCD}^{(i)}(z), \\ i = \overline{1, N-1}, \quad s = \overline{0, 4}, \quad z \in [z'_i, z'_{i+1}], \end{cases} \quad (10)$$

где:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{sAB}^{(i-1)}(z_i) = \sum_{\alpha=s}^5 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_{\alpha}^{(i-1)} h_{AB}^{\alpha-s}, \\ \mathbf{R}_{sAB}^{(i)}(z_i) = s! a_s^{(i)}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{R}_{sCD}^{(i-1)}(z'_i) = \sum_{\alpha=s}^5 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} \beta_{\alpha}^{(i-1)} h_{CD}^{\alpha-s}, \\ \mathbf{R}_{sCD}^{(i)}(z'_i) = s! \beta_s^{(i)}, \end{cases} \quad (11)$$

Заменяя в (5) функцию $V = V(z)$ аппроксимирующими функциями $\mathbf{P}_{5AB}^{(i)}(z)$ и $\mathbf{P}_{5CD}^{(i)}(z)$ в своих участках AB и CD , получим дискретные аналоги уравнения (5), записанные в узлах z_i и $z'_i, i = \overline{1, N-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{4AB}(z_i) - k^4 \mathbf{R}_{AB}(z_i) &= 0, \\ \mathbf{R}_{4CD}(z'_i) - k^4 \mathbf{R}_{CD}(z'_i) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Для узлов z_N и z'_N на правых концах отрезков AB и CD :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=4}^5 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_{\alpha}^{(N-1)} h_{AB}^{\alpha-4} - k^4 \sum_{\alpha=0}^5 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_{\alpha}^{(N-1)} h_{AB}^{\alpha-s} &= 0, \\ \sum_{\alpha=4}^5 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} \beta_{\alpha}^{(N-1)} h_{CD}^{\alpha-4} - k^4 \sum_{\alpha=0}^5 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} \beta_{\alpha}^{(N-1)} h_{CD}^{\alpha-s} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициенты линейных алгебраических уравнений (9), (12), (13) занесем в матрицу \mathbf{D} . В результате получим систему уравнений:

$$\mathbf{DQ} = 0. \quad (14)$$

По соотношениям (9), (12) и (13) формируется $12(N-1) - 8$ уравнений связей между неизвестными коэффициентами полиномов. Для определения всех коэффициентов требуется дополнительно еще 8 уравнений, которые будут определены из дискретных аналогов краевых условий на концах участков и стержня. Их приведем ниже.

Собственные частоты колебаний $\omega = \sqrt{k^4 EI / \rho A}$ находятся из условия обращения в нуль определителя матрицы коэффициентов однородной системы:

$$\det \mathbf{D} = 0. \quad (15)$$

Численно полученные корни уравнения (15) обозначим как расчетные собственные частоты $\omega_1^P, \omega_2^P, \dots, \omega_n^P, \dots$

Эталонная задача, имеющая точное решение

Для оценки точности предлагаемого метода алгебраических полиномов рассмотрим прямой стержень, имеющий длину $l = 1$ м, $l_1 = 0,5$ м, $l_2 = 0,35$ м, $s = 0,15$ м, постоянное прямоугольное поперечное сечение шириной

$b = 0,03$ м и высотой $h = 0,02$ м. Стержень принимаем титановым с модулем упругости $E = 1,1 \cdot 10^{11}$ Па и плотностью $\rho = 4,54 \cdot 10^3$ кг/м³. При этих данных рассчитан осевой момент инерции $I = bh^3 / 12 = 2 \cdot 10^{-8}$ м⁴ и площадь поперечного сечения $A = bh = 6 \cdot 10^{-4}$ м².

Решение уравнения (5) на AB имеет вид:

$$V_{AB}(z) = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 e^{kz} + C_4 e^{-kz}, \tag{16}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные, определяемые из краевых условий жесткого закрепления стержня в точке A :

$$V_{AB}(0) = 0, \quad V'_{AB}(0) = 0. \tag{17}$$

Решение уравнения колебаний (5) стержня на участке CD :

$$V_{CD}(z) = D_1 \sin kz + D_2 \cos kz + D_3 e^{kz} + D_4 e^{-kz}, \tag{18}$$

где D_1, D_2, D_3, D_4 – постоянные, определяемые из краевых условий жесткого закрепления стержня в точке D :

$$V''_{CD}(l) = 0, \quad V'''_{CD}(l) = 0. \tag{19}$$

Участок BC моделируется как абсолютно жесткий и недеформируемый участок. Уравнение этого участка возьмем как уравнение прямой в общем виде:

$$V_{BC}(z) = a + b(z - l_1), \tag{20}$$

где коэффициенты a, b определяются из равенств:

$$a = V_{AB}(l_1) = C_1 \sin kl_1 + C_2 \cos kl_1 + C_3 e^{kl_1} + C_4 e^{-kl_1}, \tag{21}$$

$$b = V'_{AB}(l_1) = k C_1 \sin kl_1 - k C_2 \cos kl_1 + k C_3 e^{kl_1} - k C_4 e^{-kl_1}.$$

При определении коэффициентов $C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2, D_3, D_4$ также учтем сопрягающие условия стыковки функций V_{BC} и V_{CD} в точке C :

$$V''_{AB}(l_1) = V''_{CD}(l_1), \quad V'''_{AB}(l_1 + s) = V'''_{CD}(l_1), \tag{22}$$

$$V_{BC}(l_1 + s) = V_{CD}(l_1 + s), \quad V'_{BC}(l_1 + s) = V'_{CD}(l_1 + s).$$

После подстановки общих решений (16), (18) в граничные и граничные условия (17), (19) и (22) получится однородная система линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования $C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2, D_3, D_4$, которая в матричном виде запишем в виде:

$$\mathbf{A}(k) \mathbf{Q} = 0, \tag{23}$$

где $\mathbf{Q} = (C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2, D_3, D_4)^T$, $\mathbf{A}(k)$ – квадратная матрица 8×8 с элементами, приведенными в табл. 1

Таблица 1

Элементы матрицы \mathbf{A}

$a_{11} = 0,$	$a_{12} = 1,$	$a_{13} = 1,$	$a_{14} = 1,$
$a_{21} = 1,$	$a_{22} = 0,$	$a_{23} = 1,$	$a_{24} = -1,$
$a_{31} = 0,$	$a_{32} = 0,$	$a_{33} = 0,$	$a_{34} = 0,$
$a_{41} = 0,$	$a_{42} = 0,$	$a_{43} = 0,$	$a_{44} = 0,$
$a_{51} = \sin kl_1,$	$a_{52} = \cos kl_1,$	$a_{53} = e^{kl_1},$	$a_{54} = e^{-kl_1},$
$a_{61} = k \cos kl_1,$	$a_{62} = -k \sin kl_1,$	$a_{63} = k e^{kl_1},$	$a_{64} = -k e^{-kl_1},$
$a_{71} = -k^2 \sin kl_1,$	$a_{72} = -k^2 \cos kl_1,$	$a_{73} = k^2 e^{kl_1},$	$a_{74} = k^2 e^{-kl_1},$
$a_{81} = -k^3 \cos kl_1,$	$a_{82} = k^3 \sin kl_1,$	$a_{83} = k^3 e^{kl_1},$	$a_{84} = -k^3 e^{-kl_1},$
$a_{15} = 0,$	$a_{16} = 0,$	$a_{17} = 0,$	$a_{18} = 0,$
$a_{25} = 0,$	$a_{26} = 0,$	$a_{27} = 0,$	$a_{28} = 0,$
$a_{35} = -k^2 \sin kl,$	$a_{36} = -k^2 \cos kl,$	$a_{37} = k^2 e^{kl},$	$a_{38} = k^2 e^{-kl},$
$a_{45} = -k^3 \cos kl,$	$a_{46} = -k^3 \sin kl,$	$a_{47} = k^3 e^{kl},$	$a_{48} = -k^3 e^{-kl},$

Продолжение Таблицы 1

$a_{55} = ks \cos(k(l_1 + s)) - \sin(k(l_1 + s)),$	$a_{55} = ks \sin(k(l_1 + s)) - \cos(k(l_1 + s)),$	$a_{57} = kse^{k(l_1+s)} - e^{k(l_1+s)},$	$a_{58} = -kse^{-k(l_1+s)} - e^{-k(l_1+s)},$
$a_{65} = -k \cos(k(l_1 + s)),$	$a_{65} = k \sin(k(l_1 + s)),$	$a_{67} = -ke^{k(l_1+s)},$	$a_{68} = ke^{-k(l_1+s)},$
$a_{75} = k^2 \sin(k(l_1 + s)),$	$a_{75} = k^2 \cos(k(l_1 + s)),$	$a_{77} = -k^2 e^{k(l_1+s)},$	$a_{78} = -k^2 e^{-k(l_1+s)},$
$a_{85} = k^3 \cos(k(l_1 + s)),$	$a_{85} = -k^3 \sin(k(l_1 + s)),$	$a_{87} = -k^3 e^{k(l_1+s)},$	$a_{88} = k^3 e^{-k(l_1+s)}.$

Условием существования нетривиального решения полученной системы является равенство нулю определителя матрицы \mathbf{A} :

$$\det \mathbf{A} = 0,$$

которое приводит к трансцендентному частотному уравнению, решением которого являются $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$

Результаты

Подставив $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ в формулу $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i^4 EI}{\rho A}}$, $i = 1, \dots, n, \dots$ получим ряд точных значений собственных частот, которые обозначим через $\omega_1^T, \omega_2^T, \dots, \omega_n^T, \dots$

Численные расчеты первых десяти собственных частот стержня с полкой проведем методом алгебраических полиномов пятого порядка для сеток Δ_{AB} и Δ_{CD} с числом отрезков $M = N - 1$, где $N = 5, 11, 21, 51, 101, 201, 501, 1001$. Расчетные значения, полученные из уравнения (15), обозначены как $\omega_1^P, \omega_2^P, \dots, \omega_n^P, \dots$

Таблица 2

Расчетные и точные значения частот колебаний стержня с полкой

Форма колебаний m	Корень трансцендентного уравнения k_m	ω_m^P	ω_m^T	Относительная погрешность $\delta_m = \left \frac{\omega_m^T - \omega_m^P}{\omega_m^P} \right $
1	2,081156	123,0880884	123,088389	$2,442403 \cdot 10^{-6}$
2	5,467182	849,4419739	849,4441766	$2,593074 \cdot 10^{-6}$
3	8,886053	2244,004533	2244,013903	$4,175734 \cdot 10^{-6}$
4	12,467653	4417,506842	4417,525798	$4,291268 \cdot 10^{-6}$
5	16,538487	7773,152464	7773,191459	$5,016634 \cdot 10^{-6}$
6	19,403106	10699,06819	10699,17477	$9,961131 \cdot 10^{-6}$
7	23,988222	16352,87569	16353,24397	$2,252038 \cdot 10^{-5}$
8	26,856658	20497,49789	20498,01068	$2,501727 \cdot 10^{-5}$
9	30,881093	27099,58795	27101,48747	$7,009407 \cdot 10^{-5}$
10	34,789576	34391,87531	34395,85181	$1,156233 \cdot 10^{-4}$

Точность расчетов оценим десятичным логарифмом абсолютного значения относительной ошибки:

$$\lg|\delta_M(\omega)| = \lg\left|\frac{\omega_m^T - \omega_m^P(M)}{\omega_m^P}\right|, m = \overline{1, 10}. \quad (24)$$

Результаты математического моделирования расчета собственных частот колебаний стержня со вставкой приведены в табл. 2.

Результаты численных расчетов приведены на рис. 2 графиком зависимости $\lg|\delta_M\omega|$ от десятичного логарифма $\lg M$, где M – число отрезков сеток Δ_{AB} и Δ_{CD} , определяемое формулой $M = N - 1$.

Характер зависимости, представленной на рис. 2, свидетельствует о том, что предложенный метод алгебраических полиномов обладает вторым порядком сходимости.

При числе узлов сетки $N = 1\,000$ обеспечивается совпадение расчетных значений с точными вплоть до шести значащих цифр.

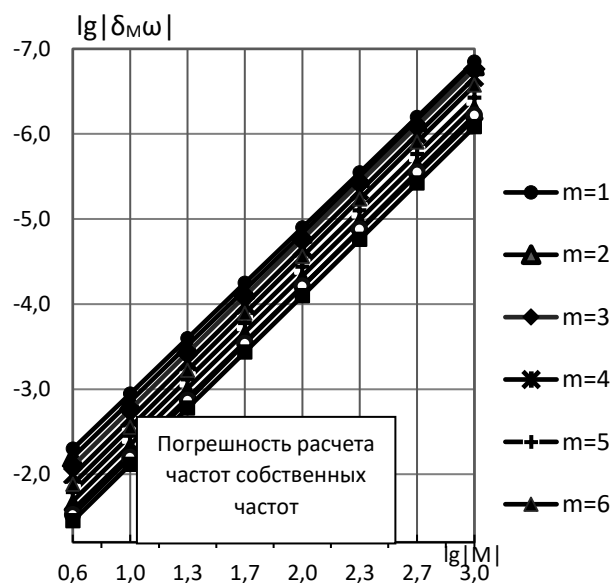


Рис. 2. Погрешность расчета собственных частот стержня со вставкой.

Заключение

1. В работе предложен численный метод алгебраических полиномов для определения собственных частот стержня с абсолютно жесткой промежуточной вставкой. Получено точное аналитическое решение для задачи, позволяющее оценить точность предлагаемого численного метода.

2. Установлен второй порядок сходимости метода: относительная погрешность убывает при увеличении числа узлов разбиения сеток. Расхождение точных и расчетных значений не превышает $1,156233 \cdot 10^{-4}$.

3. Показано, что при числе узлов сетки $N = 1\,001$ метод показывает высокую точность – до шести значащих цифр после запятой.

Вышеуказанные пункты указывают на то, что метод алгебраических полиномов пятой степени достаточно эффективен и может быть использован для инженерных расчетов в качестве расчетной схемы для лопаток ГТД с бандажной полкой, благодаря сочетанию высокой точности, вычислительной экономичности и простоты алгоритмической реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диментберг Ф. М., Колесников К. С. Вибрации в технике: справочник. Т. 3: Колебания машин, конструкций и их элементов. М.: Машиностроение, 1979. 544 с. [Dimentberg F. M., Kolesnikov K. S. Vibrations in engineering: handbook. Vol. 3: Oscillations of machines, structures and their elements. Moscow: Mashinostroenie, 1979. 544 p.]
2. Скубачевский Г. С. Авиационные газотурбинные двигатели. Конструкция и расчет деталей. М.: Машиностроение, 1969. 544 с. [Skubachevskii G. S. Aviation gas turbine engines. Design and calculation of components. Moscow: Mashinostroenie, 1969. 544 p.]
3. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с. [Babakov I. M. Theory of oscillations. Moscow: Nauka, 1965. 560 p.]
4. Федорова Н. Н., Вальгер С. А., Данилов М. Н., Захарова Ю. В. Основы работы в ANSYS 17. М.: ДМК Пресс, 2017. 210 с. [Fedorova N. N., Val'ger S. A., Danilov M. N., Zakharova Yu. V. Basics of working in ANSYS 17. Moscow: DMK Press, 2017. 210 p.]

5. Нестеренко В. Г., Ле Тиен Зыонг. Методика проектирования профильной части бандажированных лопаток ротора турбины высокого давления ГТД // Научно-технический вестник Поволжья. 2017. №4. С. 54–57. [Nesterenko V. G., Le T. Z. Design methodology of the profiled part of the shrouded blades of the high-pressure turbine rotor of a gas turbine engine // Nauchno-tekhnicheskii Vestnik Povolzh'ia. 2017. No. 4. P. 54–57].
6. Жернаков В. С., Ахмедзянов Д. А. и др. Исследование аэродинамических характеристик гиперзвуковых беспилотных летательных аппаратов в трехмерной постановке при помощи ANSYS CFX // Вестник УГАТУ. 2017. №2. С. 63–69. [Jernakov V. S., Akhmedzyanov D. A. Research aerodynamics of hypersonic unmanned aerial vehicles the three-dimensional formulation using Ansys CFX // Vestnik UGATU. 2017. No. 2. P. 63–69.]
7. Павлов В. П. Анализ спектра частот собственных колебаний стержня методом сплайнов // Вестник УГАТУ. 2016. №4. С. 16–22. [Pavlov V. P. Analysis of the spectrum of frequencies of own fluctuations of a rod by the method of splines // Vestnik UGATU. 2016. No. 4. P. 16–22].
8. Гусев Б. В., Саурин В. В. О колебаниях неоднородных балок // Инженерный вестник Дона. 2017. №3. С. 50–91. [Gusev B. V., Saurin V. V. On vibrations of inhomogeneous beams // Inzhenernyy Vestnik Dona. 2017. No. 3. P. 50–91].
9. Павлов В. П., Нусратуллина Л. Р. Метод расчета собственных частот и форм поперечных колебаний стержня переменного сечения с упругим закреплением // Вестник УГАТУ. 2019. №3. С. 24–38. [Pavlov V. P., Nusratullina L. R. The method of calculating natural frequencies and forms the transverse vibration of a rod variable cross-section with elastic securing // Vestnik UGATU. 2019. No. 3. P. 24–38.]
10. Pavlov V. P., Kudoyarova V. M., Nusratullina L. R. Eigenfrequency spectrum analysis of bending vibrations for naturally swirled rod // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 709. No. 2. Art. 022059. DOI: 10.1088/1757-899X/709/2/022059.

Поступила в редакцию 19.02.2026 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2026.1.3

**NUMERICAL METHOD FOR CALCULATING
EIGENFREQUENCIES OF BENDING VIBRATIONS
OF A ROD WITH AN ABSOLUTELY RIGID INTERMEDIATE INSERT**

© **E. M. Nusratullin, L. R. Nusratullina***

*Ufa University of Science and Technology
32 Zaki Validi st., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

Phone: +7 (347) 229 96 32.

**Email: mardliliya@yandex.ru*

The article presents a numerical technique for calculating natural frequencies of bending vibrations of a rod with an absolutely rigid intermediate insert, based on the method of fifth-degree algebraic polynomials. The rod is modelled as a composite system consisting of three sequentially connected segments. The two outer segments (root and top) represent curvilinear portions of the rod with flexural rigidity EI and mass per unit length ρA , governed by a fourth-order differential equation of vibrations. The middle segment, corresponding to the insert zone, is modelled as an absolutely rigid, undeformable element described by a straight line. To verify the numerical method, a benchmark problem with an exact analytical solution was solved. It is demonstrated that with sufficient mesh density along the rod length, the method provides agreement between calculated values and the reference solution up to the sixth decimal place.

Keywords: rod, rod model, rod with an absolutely rigid insert, natural frequencies, method of fifth-degree algebraic polynomials.

Received 19.02.2026.

Об авторах / About the authors

НУСРАТУЛЛИН Эдуард Марсович

Доцент кафедры искусственного интеллекта
и перспективных математических исследований.
Уфимский университет науки и технологий.
Email: nusratullinem@rambler.ru

NUSRATULLIN Eduard Marsovich

Associate Professor of the Department of Artificial Intelligence
and Advanced Mathematical Research.
Ufa University of Science and Technology.
Email: nusratullinem@rambler.ru

НУСРАТУЛЛИНА Лилия Ринатовна

Старший преподаватель кафедры искусственного интеллекта
и перспективных математических исследований.
Уфимский университет науки и технологий.
Email: mardliliya@yandex.ru

NUSRATULLINA Liliya Rinatovna

Senior Lecturer of the Department of Artificial Intelligence
and Advanced Mathematical Research.
Ufa University of Science and Technology.
Email: mardliliya@yandex.ru