

раздел МАТЕМАТИКА и МЕХАНИКА

УДК 534.13

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2026.2.1

**ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ**

© В. П. Павлов, В. М. Кудоярова*, Л. Р. Нусратуллина

*Уфимский университет науки и технологий
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.***Email: kudoyarova@inbox.ru*

В работе проводится анализ точности моделирования собственных частот колебаний естественно закрученного стержня, который рассматривается как модель первого приближения реальных лопаток газотурбинных двигателей (ГТД). Моделирование частот собственных колебаний проводилось в двух наиболее популярных пакетах конечно-элементного моделирования: ANSYS Workbench и SolidWorks. Результаты расчетов, полученные в результате моделирования, сравнивались с точным решением для нулевого угла закрутки стержня. Проведен анализ полученных результатов численного расчета для пространственных колебаний естественно закрученного стержня, который показывает, что максимальное расхождение результатов расчета в пакетах конечно-элементного моделирования ANSYS Workbench и SolidWorks не превышает 5% по сравнению с результатами, полученными по балочной теории стержней.

Ключевые слова: собственные колебания стержня, численное моделирование.

Введение

Для обеспечения усталостной прочности лопаток газотурбинных двигателей (ГТД) уровень переменных напряжений в них должен быть достаточно низким. Повышенные переменные напряжения возникают в лопатках в основном на резонансных частотах, когда частота внешних возбуждающих сил совпадает с одной из собственных частот колебаний лопатки. Для отстройки от резонансов необходимо уже на стадии проектирования правильно определять собственные частоты колебаний лопаток, особенно это касается низших частот колебаний [1–2].

Лопатки ГТД представляют собой естественно закрученные стержни с переменным по длине поперечным сечением, что не позволяет для определения спектра частот собственных колебаний воспользоваться традиционными аналитическими формулами, разработанными только для стержней с постоянным поперечным сечением [3]. Поэтому наиболее приемлемым в настоящее время является подход, базирующийся на применении численных методов, разработкой некоторых из них занимаются и авторы данной статьи [4–7].

В данной работе выполнено моделирование колебаний естественно закрученного стержня в пакетах конечно-элементного моделирования ANSYS Workbench и SolidWorks, проведен ряд исследований по определению влияния степени закрутки стержня на спектр частот его собственных колебаний, а также создана методика расчета таких колебаний, обеспечивающая его компьютерную реализацию.

Постановка задачи

Рассматривается естественно закрученный стержень, являющийся приближенной моделью пера рабочей лопатки осевого компрессора или турбины ГТД, представленный на *рис. 1*. Ось Z направлена в радиальном направлении перпендикулярно к оси вращения рабочего колеса. Геометрия стержня определяется его поперечными сечениями, задаваемыми координатой плоскости XU и углом поворота α , определяющим угол поворота поперечного сечения стержня относительно неподвижной координатной системы XU при движении вдоль оси Z , как показано на *рис. 1*.

Ставится задача выполнить моделирование пространственных колебаний естественно закрученного стержня, близкого по своим геометрическим характеристикам к лопаткам реальных ГТД, в наиболее популярных пакетах конечно-элементного моделирования ANSYS Workbench и SolidWorks, провести исследования влияния степени закрутки стержня на спектр частот его собственных колебаний и оценить насколько результаты расчетов в выбранных пакетах отличаются друг от друга и насколько полученные численные результаты близки к результатам расчетов по математической модели, имеющей точное аналитическое решение.

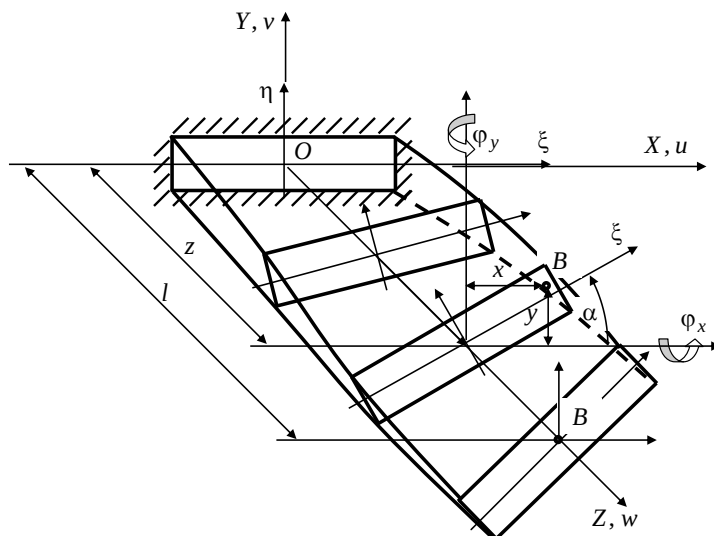


Рис. 1. Естественно закрученный стержень вдоль оси Z.

Геометрия стержня и физико-механические характеристики его материала

Рассматривается стержень, жестко закрепленный на конце при $z = 0$, имеющий длину $l = 0,2$ м и прямоугольное поперечное сечение с размерами $b = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $h = 3 \cdot 10^{-3}$ м, показанный на рис. 1.

Моменты инерции данного поперечного сечения относительно его главных центральных осей ξ, η :

$$I_{\xi} = \frac{bh^3}{2} = 4,5 \cdot 10^{-11} \text{ м}^4, \quad I_{\eta} = \frac{hb^3}{2} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4, \quad I_{\xi\eta} = 0. \quad (1)$$

Модуль Юнга материала стержня $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и плотность $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³. Погонная масса стержня $\mu = \rho b h = 0,471$ кг/м.

Вдоль оси Z угол ориентации поперечного сечения α изменяется по линейному закону:

$$\alpha = \gamma z \quad \text{при} \quad \gamma = \Delta\alpha / l, \quad (2)$$

где $\Delta\alpha$ – угол закручивания стержня на его полной длине.

Численный эксперимент

Численный эксперимент проводился для разных углов закручивания стержня с углом поворота его сечения $\Delta\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$. В каждом эксперименте для определенного угла закручивания определялись первые десять частот собственных колебаний.

При моделировании стержня в пакетах ANSYS Workbench и SolidWorks стержень строился в виде трехмерной твердотельной модели с постоянным поперечным прямоугольным сечением. При построении конечно-элементной сетки ее параметры задавались одинаковыми для обоих расчетных пакетов; число конечных элементов 11 040 при 19 247 узлов. Сетка строилась упорядоченной и равномерной, как показано на рис. 2.

При моделировании естественной закрутки стержень жестко фиксировался с одного конца справа, а на другом конце сечение стержня закручивалось на заданный угол, так что вдоль оси стержня угол ориентации поперечного сечения изменялся по линейному закону вдоль всей длины стержня до достижения заданного угла поворота, рис. 2.

В настройках решателя задавался модальный тип анализа с десятью формами и частотами собственных колебаний, необходимыми для анализа расчетов, выполненных в пакетах ANSYS Workbench и SolidWorks.

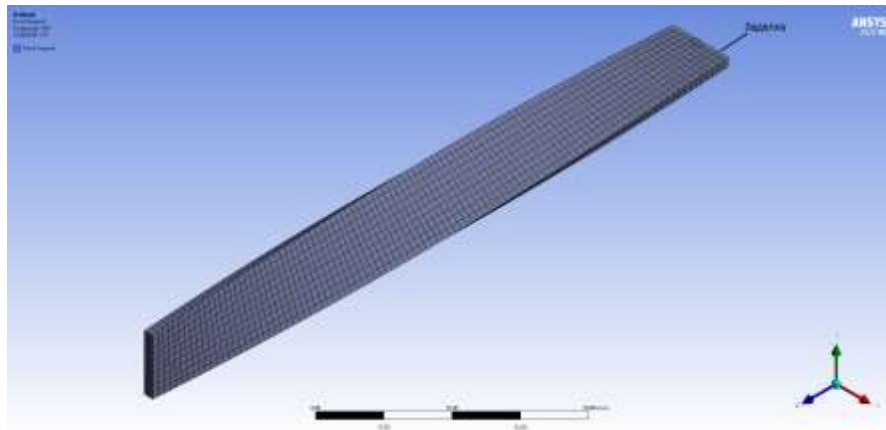


Рис. 2. Заделка стержня справа со свободным концом слева, закрученным на 90° .

Результаты расчета

В результате расчетов в пакетах Ansys и SolidWorks были определены первые десять собственных частот и форм колебаний стержня при углах закрутки: $\Delta\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$.

Результаты расчетов частот собственных колебаний в пакете ANSYS Workbench представлены графически для первых десяти форм колебаний на рис. 3 в виде зависимостей частот колебаний ω от углов закручивания стержня $\Delta\alpha$ и номеров форм собственных колебаний m .

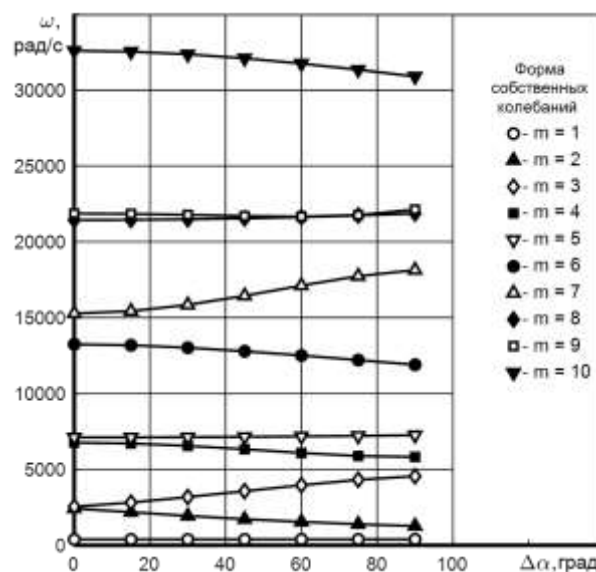


Рис. 3. Зависимости круговых частот собственных колебаний ω от угла закручивания $\Delta\alpha$ при расчетах в пакете Ansys.

Из рис. 3 видно, что закрутка стержня существенно влияет на спектр частот собственных изгибных колебаний стержня, поэтому можно утверждать, что при проектировании компрессорных и турбинных лопаток реальных ГТД необходимо учитывать данный аспект, используя, например, вычислительный комплекс ANSYS Workbench.

Для результатов расчетов частот собственных колебаний, полученных в пакете SolidWorks, дополнительные графики не строились, так как оказалось, что визуально они практически идентичны графикам на рис. 3, полученным для результатов расчета в пакете ANSYS Workbench.

Для более объективной оценки степени расхождения результатов расчетов собственных частот по ANSYS Workbench и SolidWorks воспользуемся формулой

$$\delta_m^{(An-SW)} = \left| \frac{\omega_m^{(An)} - \omega_m^{(SW)}}{\omega_m^{(An)}} \right|, \quad (3)$$

где $\omega_m^{(An)}$ – значения частот собственных колебаний, рассчитанные в пакете ANSYS Workbench; $\omega_m^{(SW)}$ – значения частот собственных колебаний, рассчитанные в пакете SolidWorks; $\delta_m^{(An-SW)}$ – абсолютное значение относительного расхождения между значениями частот собственных колебаний, рассчитанных в пакетах ANSYS Workbench и SolidWorks.

На рис. 4 представлены графики изменения десятичных логарифмов $\lg(\delta_m^{(An-SW)})$ относительного расхождения результатов расчетов в пакетах Ansys Workbench и SolidWorks в зависимости от угла закручивания стержня $\Delta\alpha$ и номера формы собственных колебаний m .

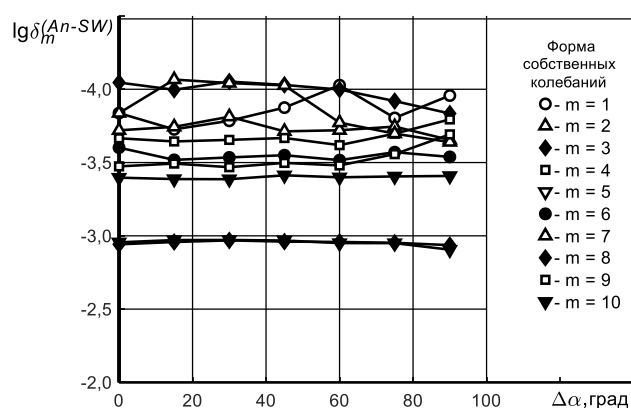
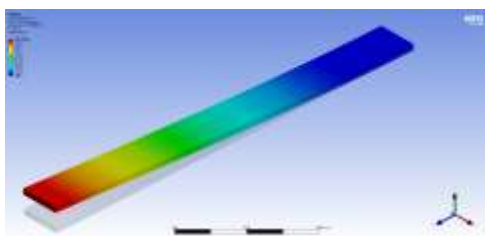
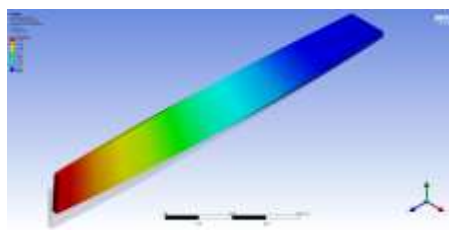


Рис. 4. Десятичные логарифмы относительного расхождения $\lg(\delta_m^{(An-SW)})$ в зависимости от угла закручивания стержня $\Delta\alpha$ и номера формы собственных колебаний m .

Формы собственных колебаний стержня при двух углах закрутки $\Delta\alpha = 0^\circ$ и $\Delta\alpha = 90^\circ$ представлены на рис. 5–14. Они получились практически одинаковыми при расчетах в пакетах Ansys Workbench и SolidWorks.

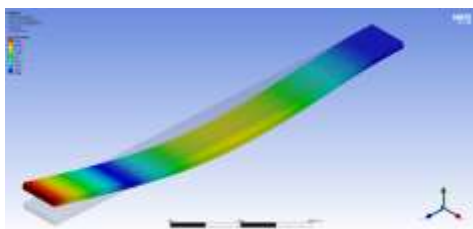


(а)

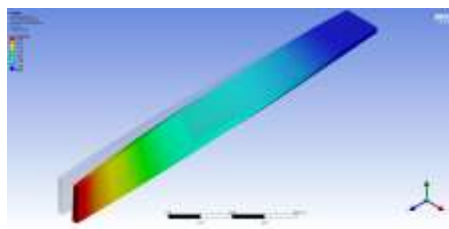


(б)

Рис. 5. Первая форма собственных колебаний (а) стержень при $\Delta\alpha = 0^\circ$; (б) стержень при $\Delta\alpha = 90^\circ$.

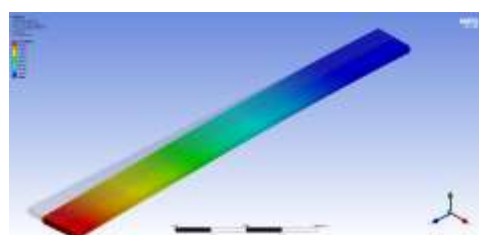


(а)

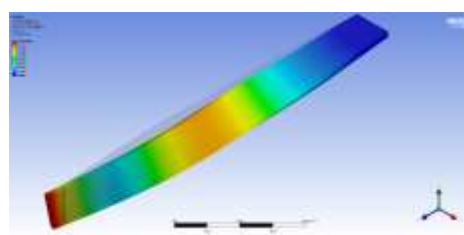


(б)

Рис. 6. Вторая форма собственных колебаний (а) стержень при $\Delta\alpha = 0^\circ$; (б) стержень при $\Delta\alpha = 90^\circ$.

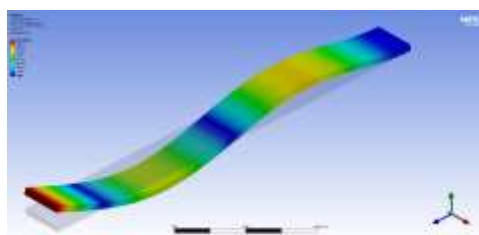


(a)

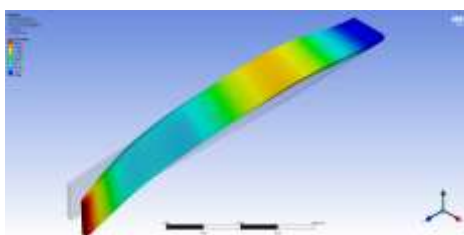


(б)

Рис. 7. Третья форма собственных колебаний
(a) стержень при $\Delta\alpha = 0^\circ$; (б) стержень при $\Delta\alpha = 90^\circ$.

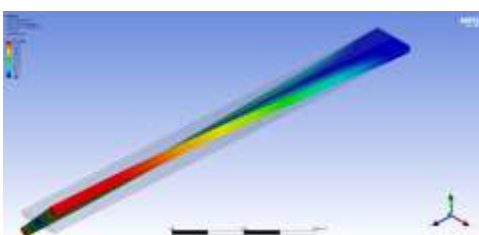


(a)

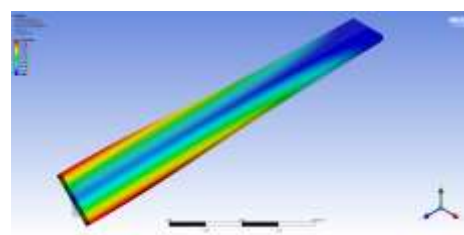


(б)

Рис. 8. Четвертая форма собственных колебаний
(a) стержень при $\Delta\alpha = 0^\circ$; (б) стержень при $\Delta\alpha = 90^\circ$.

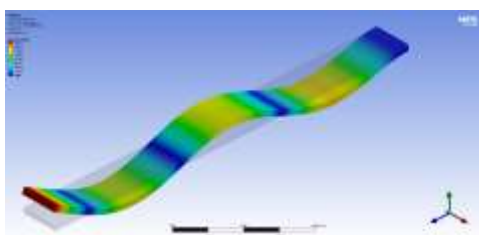


(a)

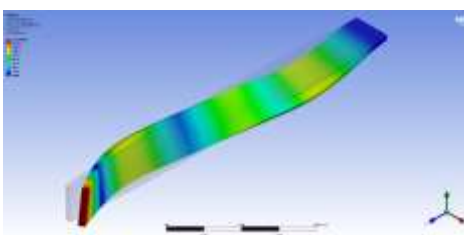


(б)

Рис. 9. Пятая форма собственных колебаний
(a) стержень при $\Delta\alpha = 0^\circ$; (б) стержень при $\Delta\alpha = 90^\circ$.

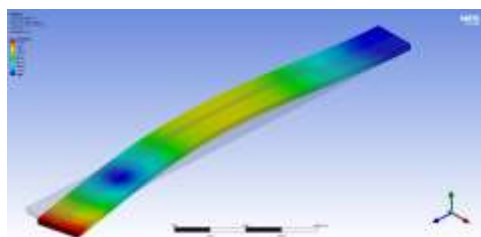


(a)

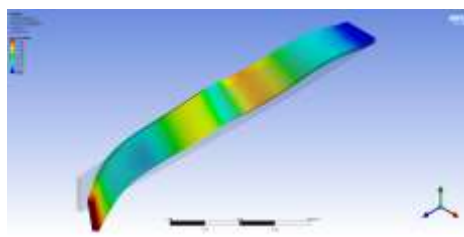


(б)

Рис. 10. Шестая форма собственных колебаний
(a) стержень при $\Delta\alpha = 0^\circ$; (б) стержень при $\Delta\alpha = 90^\circ$.

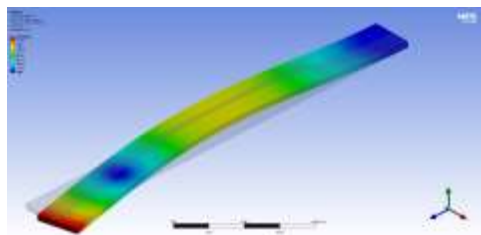


(a)

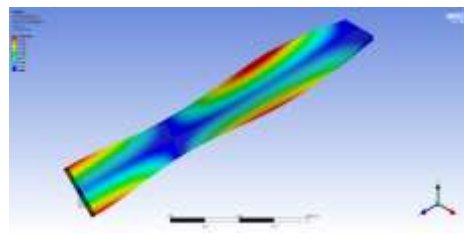


(б)

Рис. 11. Седьмая форма собственных колебаний
(a) стержень при $\Delta\alpha = 0^\circ$; (б) стержень при $\Delta\alpha = 90^\circ$.

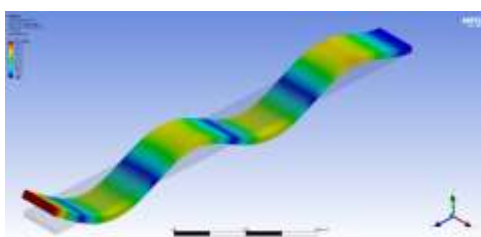


(a)

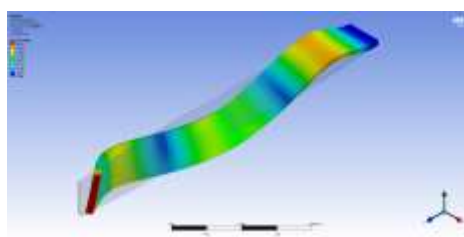


(б)

Рис. 12. Восьмая форма собственных колебаний
(a) стержень при $\Delta\alpha = 0^\circ$; (б) стержень при $\Delta\alpha = 90^\circ$.

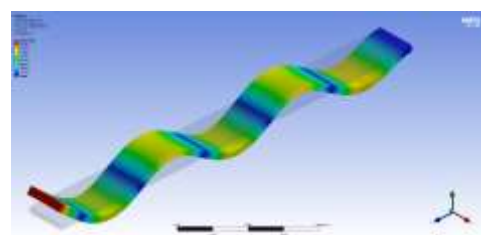


(a)

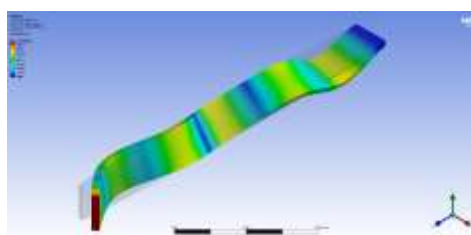


(б)

Рис. 13. Девятая форма собственных колебаний
(a) стержень при $\Delta\alpha = 0^\circ$; (б) стержень при $\Delta\alpha = 90^\circ$.



(a)



(б)

Рис. 14. Десятая форма собственных колебаний
(a) стержень при $\Delta\alpha = 0^\circ$; (б) стержень при $\Delta\alpha = 90^\circ$.

Изображения собственных форм колебаний на рис. 5–14, позволяют представить, как деформируется стержень при собственных колебаниях и какие при этом возможны негативные процессы, влияющие на эксплуатационные характеристики такого вида конструкций.

Определение расхождения результатов расчетов частот собственных колебаний, полученных в пакете Ansys, с результатами расчетов по балочной теории

Рассматривая данную статью и как тестирование пакетов Ansys Workbench и SolidWorks, возникает необходимость в наличии аналитического решения, принимаемого за точное при анализе погрешности численных методов.

Для получения точного аналитического решения рассмотрим прямую балку, защемленную на одном из концов и свободную на другом. Балка имеет постоянное поперечное сечение и постоянные по ее объему плотность и модуль упругости.

Такой балкой является естественно закрученный стержень на *рис. 1*, когда его угол закручивания является нулевым ($\Delta\alpha = 0^\circ$).

Запишем дифференциальные соотношения, описывающие поперечные колебания естественно закрученного стержня. При этом изгибное деформирование стержня при колебаниях определим перемещениями u, v точек его оси, являющимися функциями координаты Z и времени t :

$$u = u(z, t), \quad v = v(z, t). \quad (4)$$

Получим систему из двух дифференциальных уравнений, описывающих собственные изгибные колебания стержня с изменяющимися вдоль оси Z погонной массой и моментами инерции:

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_{xy} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_{xy}}{\partial z} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + E \frac{\partial^2 I_{xy}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ + EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_x}{\partial z} \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + E \frac{\partial^2 I_x}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_y}{\partial z} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + E \frac{\partial^2 I_y}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ + EI_{xy} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_{xy}}{\partial z} \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + E \frac{\partial^2 I_{xy}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

где E – модуль упругости материала стержня; $I_x = I_x(z)$, $I_y = I_y(z)$, $I_{xy} = I_{xy}(z)$ – функции изменения моментов инерции поперечного сечения стержня вдоль его оси z ; $\mu = \mu(z)$ – функции изменения погонной массы стержня вдоль его оси Z .

Точное решение для рассматриваемого стержня существует при угле закручивания $\Delta\alpha = 0^\circ$, когда центробежный момент инерции для рассматриваемого стержня становится равным нулю $I_{xy} = 0$, а осевые моменты инерции не меняются вдоль оси Z $I_x = \text{const}$, $I_y = \text{const}$ и их производные по Z равны нулю. В этом случае система уравнений (5) распадается на два независимых уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Для уравнений вида (6) существует точное аналитическое решение [5], на основе которого в работе [4] для рассматриваемого стержня рассчитаны значения круговых частот собственных колебаний $\omega_m^{(x)}$ и $\omega_m^{(y)}$, которые сведены в *табл. 1*, где:

$\omega_m^{(x)}$ – частоты собственных колебаний в плоскости наименьшей жесткости YZ ;

$\omega_m^{(y)}$ – частоты собственных колебаний в плоскости наибольшей жесткости XZ .

Анализируя формы колебаний на *рис. 5–14*, видим, что чисто изгибным колебаниям соответствуют формы с номерами 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10. При этом колебания по формам 3 и 7 происходят в плоскости наибольшей жесткости XZ , а все остальные в плоскости наименьшей жесткости YZ .

Таблица 1

Точные значения частот собственных колебаний наименьшей жесткости в плоскости YZ и наибольшей жесткости в плоскости XZ для балки прямоугольного поперечного сечения

Форма колебаний, m	Частоты колебаний в плоскости YZ $\omega_m^{(x)}$, рад/с	Частоты колебаний в плоскости XZ $\omega_m^{(y)}$, рад/с
1	384,2391051264228	2561,594034176152
2	2407,985368145140	16053,23578763426
3	6742,428756621345	44949,52504414229
4	13212,46936786613	88083,12911910751
5	21841,15856693261	145607,7237795507

Рассматривая частоты собственных колебаний $\omega_m^{(x)}$ и $\omega_m^{(y)}$ как единый массив, выберем в порядке возрастания из табл. 1 первые семь точных значений круговых частот собственных колебаний стержня, дадим им обозначение $\omega_m^{(T)}$ и занесем их во вторую колонку табл. 2. При этом частоты собственных колебаний в плоскости наивысшей жесткости XZ выделим в табл. 2 жирным шрифтом. В третью колонку табл. 2 занесем расчетные значения $\omega_m^{(An)}$ частот собственных колебаний, полученные в пакете Ansys Workbench. Для оценки степени расхождения между результатами расчетов частот собственных колебаний на основе точного аналитического решения и численного метода, реализованного в пакете Ansys Workbench вычислим относительные расхождения расчетных результатов

$$\delta_m^{(An)} = \left| \frac{\omega_m^{(T)} - \omega_m^{(An)}}{\omega_m^{(T)}} \right|. \quad (7)$$

и занесем их в четвертую колонку табл. 2.

Таблица 2

Относительная погрешность вычисления частоты собственных колебаний стержня с нулевым углом закрутки в пакете Ansys Workbench

Форма колебаний, m	Точные частоты собственных колебаний $\omega_m^{(T)}$, рад/с	Расчетные частоты собственных колебаний в пакете Ansys Workbench $\omega_m^{(An)}$, рад/с	Относительная погрешность $\delta_m = \left \frac{\omega_m^{(T)} - \omega_m^{(An)}}{\omega_m^{(T)}} \right $
1	384,2391051264228	386,51620518303	$-5,926257963 \cdot 10^{-3}$
2	2407,985368145140	2419,36095932422	$-4,724111420 \cdot 10^{-3}$
3	2561,594034176152	2546,42908870254	$5,920120546 \cdot 10^{-3}$
4	6742,428756621345	6767,06192140158	$-3,653455701 \cdot 10^{-3}$
5	13212,46936786613	13244,31293838550	$-2,410114993 \cdot 10^{-3}$
6	16053,23578763426	15275,22149026990	$4,846464025 \cdot 10^{-3}$
7	21841,15856693261	21859,33984463950	$-8,324319266 \cdot 10^{-4}$
8	32626,90895495458	32586,06477591770	$1,251855610 \cdot 10^{-3}$

Из табл. 2 видно, что относительное расхождение собственных изгибных частот при первых восьми формах изгибных колебаний за исключением формы 6 не превышает по модулю величины $1 \cdot 10^{-2}$, что соответствует расхождению в 1% в табл. 2.

Для собственной частоты с номером 6 расхождение немного больше и равно $\delta_6^{(An)} = 4.84646402 \cdot 10^{-3} \approx 4,84 \%$.

С практической инженерной точки зрения результаты практически одинаковы.

Следует также обратить внимание на знаки относительных расхождений в табл. 2. Они фактически чередуются, что может указывать на отсутствие какой-либо явной причины, вызывающей различие в полученных результатах.

В итоге можно утверждать, что при описании колебательных процессов стержневых конструкций, близких по форме и размерам к рассмотренным в данной работе, на этапе инженерных расчетов совсем не обязательно использовать такие тяжеловесные пакеты, как Ansys и SolidWorks. Иногда целесообразнее применить менее трудоемкие методы сопротивления материалов, что обеспечит более оперативное рассмотрение большего количества вариантов и ускоренное нахождение наиболее оптимальных конструктивных решений.

Заключение

1. В данной статье выполнено моделирование колебаний естественно закрученного стержня в пакетах конечно-элементного моделирования ANSYS Workbench и SolidWorks. Проведены исследования по определению

влияния степени закрутки стержня на спектр частот его собственных колебаний и показано существенное влияние на частоты собственных колебаний угла закрученности стержня.

2. Численно оценена степень расхождения результатов расчетов, полученных в пакетах ANSYS Workbench и SolidWorks, и показано, что в данной задаче оба метода дают практически идентичные результаты.

3. Результаты расчетов в пакете ANSYS Workbench сопоставлены с результатами, полученными по балочной теории стержней, и показано, что в рассмотренных случаях результаты расчетов не расходятся более чем на 5%, что позволяет считать, что с инженерной точки зрения они достаточно близки и во многих случаях инженерные расчеты не требуют применения тяжеловесных конечно-элементных пакетов типа ANSYS Workbench и SolidWorks, а можно вполне обойтись более простыми одномерными балочными моделями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А., Шор Б. Ф., Иоселевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин: Справочник. М.: Машиностроение, 1979. 702 с. [Birger I. A., Shor B. F., Ioselevich G. B. Strength calculation of machine parts: handbook. Moscow: Mashinostroenie, 1979. 702 p.]
2. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 560 с. [Birger I. A., Mavlyutov R. R. Strength of materials. Moscow: Nauka, 1986. 560 p.]
3. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с. [Babakov I. M. Theory of oscillations. Moscow: Nauka, 1965. 560 p.]
4. Павлов В. П., Нусратуллина Л. Р. Собственные изгибные колебания естественно закрученного стержня // Вестник УГАТУ. 2019. Т. 23. №4(86). С. 33–41. [Pavlov V. P., Nusratullina L. R. Natural bending vibrations of naturally twisted rod // Vestnik UGATU. 2019. Vol. 23. No. 4(86). P. 33–41].
5. Нусратуллина Л. Р., Нусратуллин Э. М., Павлов В. П. Расчет собственных частот и форм колебаний стержня с постоянным поперечным сечением: учебное пособие. Уфа: УГАТУ, 2021. 86 с. [Nusratullina L. R., Nusratullin E. M., Pavlov V. P. Calculation of natural frequencies and vibration modes of a rod with a constant cross-section: textbook. Ufa: Ufa State Aviation Technical University, 2021. 86 p.]
6. Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M. The enhanced spline-method for numerical results of natural frequencies of beams // Procedia Engineering. 2017. Vol. 176. International Conference "Dynamics and Vibroacoustics of Machines" (DVM2016). P. 438–450.
7. Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M. Spline-method for numerical calculation of natural-vibration frequency of beam with variable cross-section // Procedia Engineering. 2017. Vol. 206. P. 710–715.

Поступила в редакцию 05.11.2025 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2026.2.1

EIGENFREQUENCY SPECTRUM OF NATURALLY TWISTED ROD

© V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova*, L. R. Nusratullina

*Ufa University of Science and Technology
32 Zaki Validi st., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.***Email: kudoyarova@inbox.ru*

The paper analyzes the accuracy of modeling the natural frequencies of oscillations of a naturally twisted rod, which is considered as a first approximation model of real gas turbine engine (GTE) blades. Modeling of natural frequencies was carried out in two of the most popular finite element modeling packages: ANSYS Workbench and SolidWorks. The calculation results obtained as a result of modeling were compared with the exact solution for a zero twist angle of the rod. An analysis of the obtained results of numerical calculation for spatial oscillations of a naturally twisted rod is carried out, which shows that the maximum discrepancy between the calculation results in the finite element modeling packages ANSYS Workbench and SolidWorks does not exceed 5% compared to the results obtained by the beam theory of rods.

Keywords: *natural oscillations of the rod, numerical modeling.*

*Received 05.11.2025.***Об авторах / About the authors****ПАВЛОВ Виктор Павлович**

Д-р техн. наук, доцент,
профессор каф. сопротивления материалов.
Уфимский университет науки и технологий.
Email: victor.pavlov.51@yandex.ru.

PAVLOV Victor Pavlovich

Doctor of Technical Sciences, Docent,
Professor of the Department of Strength of Materials.
Ufa University of Science and Technology.
Email: victor.pavlov.51@yandex.ru.

КУДОЯРОВА Вилина Маратовна

Канд. техн. наук, доцент,
доцент каф. сопротивления материалов.
Уфимский университет науки и технологий.
Email: kudoyarova@inbox.ru
Web of Science ResearcherID V-5471-2018.

KUDOYAROVA Vilina Maratovna

Candidate of Technical Sciences, Docent, Associate
Professor of the Department of Strength of Materials.
Ufa University of Science and Technology.
Email: kudoyarova@inbox.ru
ORCID ID 0000-0002-2736-4678.
Web of Science ResearcherID V-5471-2018.
Scopus Author ID 57190970220.

НУСРАТУЛЛИНА Лилия Ринатовна

Старший преподаватель каф. математики.
Уфимский университет науки и технологий.
Email: mardliliya@yandex.ru.

NUSRATULLINA Liliya Rinatovna

Senior Lecturer of the Department of Mathematics.
Ufa University of Science and Technology.
Email: mardliliya@yandex.ru
ORCID ID 0009-0007-2038-4805.
Scopus Author ID 57214673802.